

深海中浮式直立圆柱体水动力系数研究

王冬姣 周 晖

(华南理工大学土木与交通学院, 广州 510640)

摘 要 提出了水动力系数计算中代表深海情况的水深条件。采用特征函数展开及边界匹配的方法求解流场各子区域速度势的展开系数,得到了深海中浮式直立圆柱体的水动力系数,并对所需的截断项数进行了讨论。用提出的处理方法能有效地计算深海中浮式直立圆柱体的水动力系数。

关键词 浮式直立圆柱 水动力系数 深水 截断项数

中图法分类号 O353.2; **文献标志码** A

随着人类开发海洋的步伐逐渐迈向深海,涌现出了很多适应深海环境的浮式海洋平台, Spar 平台就是其中之一。现代 Spar 生产平台的主体一般为单圆柱体构造,垂直悬浮于水中。在研究其运动响应时,首先计算波浪作用力和水动力系数。1950年, Morison 等人^[1]提出了计算直立圆柱波浪力的半经验公式,即著名的 Morison 公式,它适用于特征长度与波长之比小于 0.2 的结构物。MacCamy 和 Fuchs^[2]对有限水深中由海底伸向水面的大直径圆柱体得到了波浪绕射的解析解。Garrison^[3]用三维边界元法建立了有限水深条件下波浪与任意形状结构物相互作用的计算模型,将水深半径比等于 10 时得到的数值近似作为球体和浅吃水直立圆柱体在深水情况下的结果,得到了有限水深及无限水深情况下水面浮式直立圆柱体的水动力系数及其运动响应。Sabunca 和 Calisal^[4], Yeung^[5] 及 Bhatta 和 Rahman^[6]采用特征函数展开法讨论了有限水深下穿透水面的直立圆柱体的辐射问题。对深水海域中深吃水浮式直立圆柱体的绕射问题来说,可近似按座底圆柱处理^[7]。采用特征函数展开法求解结构物

的水动力系数时,无法直接求解深水情况下的水动力系数,文献[4]将水深半径比等于 20 定义为深水情况。文献[8]讨论了水深吃水比对二维船型剖面水动力系数的影响,当水深吃水比大于 5.0 时,水深对水动力系数的影响可忽略。本文将讨论水动力系数不受水深影响的计算条件,并采用特征函数展开及边界匹配法计算深海中浮式直立圆柱体的水动力系数。

1 基本方程

假设水是不可压缩的无黏无旋流体,圆柱体的运动幅值足够小,则可用线性势流理论求解。设浮式直立圆柱体的半径为 a ,吃水为 T ,坐标系如图 1 所示。

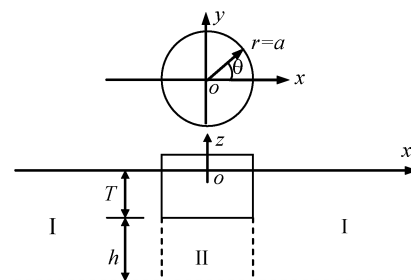


图1 坐标系及流域划分

对无限水深情况,当直立圆柱体在水面作

摇荡运动时,可假设离圆柱体底部垂直距离为 h 的地方,其流体速度已趋于零。在研究波浪问题时,当水深大于波长的一半时,定义为深水情况^[9]。为了确保水深大于波长之半,可取 h 等于半波长,即 $h = \pi/k$, k 为波数。另外,还应考虑水深吃水比对水动力系数的影响,即取水动力系数不受影响的水深吃水比。由文献[8]可知,当水深吃水比大于 5.0 时,水深对二维船型剖面水动力系数的影响可忽略,因此水动力系数不受影响的 h 可取为: $h = 4T$ 。综上所述,可取 $h = \max\{\pi/k, 4T\}$ 。浮于水面的直立圆柱体作纵荡,垂荡和纵摇运动产生的在 $-(h+T) \leq z \leq 0$ 范围内的速度势可表示成

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^5 \phi_l(r, \theta, z) \hat{\xi}_l e^{-i\omega t} \right\} \quad (1)$$

式(1)中, ω 为圆频率; ϕ_1, ϕ_3 和 ϕ_5 分别为单位幅值纵荡,垂荡和纵摇运动引起的辐射势; $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_3$ 和 $\hat{\xi}_5$ 分别为纵荡,垂荡和纵摇的运动位移幅值。 $\phi_l(r, \theta, z)$, $l = 1, 3, 5$, 必须满足拉普拉斯方程和下述边界条件

$$\frac{\partial \phi_l(r, \theta, z)}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi_l(r, \theta, z), \quad r \geq a, \quad z = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi_l(r, \theta, z)}{\partial z} = 0, \quad z = -(h+T) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_l(r, \theta, z)}{\partial r} = \begin{cases} -i\omega \cos \theta, & l = 1 \\ 0, & l = 3 \\ -i\omega(z - z_g) \cos \theta, & l = 5 \end{cases} \quad (4)$$

$$r = a, \quad -T \leq z \leq 0$$

$$\frac{\partial \phi_l(r, \theta, z)}{\partial z} = \begin{cases} 0, & l = 1 \\ -i\omega, & l = 3 \\ i\omega r \cos \theta, & l = 5 \end{cases} \quad (5)$$

$$r < a, \quad z = -T$$

水域无穷远处的辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial \phi_l}{\partial r} - ik \phi_l \right\} = 0 \quad (6)$$

根据 Bernoulli 方程,可得流场中压强 p

$$p(r, \theta, z, t) = -\rho \frac{\partial \Phi(r, \theta, z, t)}{\partial t} \quad (7)$$

作用在圆柱体 q ($q = 1, 3, 5$) 模态上的水动力 F_q , 可表示成

$$F_q = \iint_{S_b} -p(r, \theta, z, t) n_q dS = (\hat{f}_{q1} \hat{\xi}_1 + \hat{f}_{q3} \hat{\xi}_3 + \hat{f}_{q5} \hat{\xi}_5) e^{-i\omega t} \quad (8)$$

式(8)中, S_b 为物体湿表面积; n_1, n_3 分别为物面的单位外法向矢量在 x, z 方向的投影, $n_5 = (z - z_g) n_1 - x n_3$; z_g 为圆柱体重心的垂向坐标。由 l ($l = 1, 3, 5$) 模态摇荡运动引起的在第 q ($q = 1, 3, 5$) 模态方向上的水动力系数,即附加质量 A_{ql} 和阻尼系数 B_{ql} 为

$$A_{ql} = \frac{\operatorname{Re} [f_{ql}]}{\omega^2}, \quad B_{ql} = \frac{\operatorname{Im} [f_{ql}]}{\omega} \quad (9)$$

其无因次附加质量 a_{ql} 和阻尼系数 b_{ql} 可表示为:

$$a_{ql} = \begin{cases} A_{ql}/(\rho a^3), & q = 1, 3, & l = 1, 3 \\ A_{ql}/(\rho a^4), & q = 1, 3, & l = 5 \\ \text{或 } q = 5, & l = 1, 3 \\ A_{ql}/(\rho a^5), & q = 5, & l = 5 \end{cases} \quad (10)$$

$$b_{ql} = \begin{cases} B_{ql}/(\rho \omega a^3), & q = 1, 3, & l = 1, 3 \\ B_{ql}/(\rho \omega a^4), & q = 1, 3, & l = 5 \\ \text{或 } q = 5, & l = 1, 3 \\ B_{ql}/(\rho \omega a^5), & q = 5, & l = 5 \end{cases} \quad (11)$$

2 流场中速度势的求解

将 $-(h+T) \leq z \leq 0$ 范围内的流场分解为内、外两个子区域,分别记为 I、II。在外域 I 上将速度势写成

$$\phi_l^I(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos m \theta \phi_{lm}^I(r, z), \quad l = 1, 3, 5 \quad (12)$$

式(12)中

$$\phi_{lm}^I(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^I \frac{K_m(\mu_n r)}{K_m'(\mu_n a)} Z_n(\mu_n z) \quad (13)$$

$$\mu_0 = -ik = -i\omega^2/g,$$

$$\omega^2 = -\mu_n g \tan [\mu_n (h+T)], \quad n \geq 1 \quad (14)$$

$$Z_n(\mu_n z) = \cos [\mu_n (z + h + T)] \quad (15)$$

式中, $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2, m \geq 1$; $H_m(kr)$ 为第一类 m 阶 Hankel 函数; $K_m(\mu_n r)$ 为第二类 m 阶修正 Bessel 函数; $H'_m(ka)$ 和 $K'_m(\mu_n a)$ 为相应函数对自变量的求导

函数。

在内域 II 上的速度势可写成

$$\phi_{II}^{\Pi}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos m\theta \phi_{lm}^{\Pi}(r, z) + \phi_{lp}^{\Pi}(r, \theta, z) \quad (16)$$

式(16)中

$$\phi_{lm}^{\Pi}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}^l V_m(\lambda_n r) Y_n(\lambda_n z) \quad (17)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{h} \quad (18)$$

$$Y_n(\lambda_n z) = \cos [\lambda_n(z + h + T)] \quad (19)$$

径向特征函数:

$$V_m(\lambda_0 r) = \left(\frac{r}{a}\right)^m \quad (20a)$$

$$V_m(\lambda_n r) = \frac{I_m(\lambda_n r)}{I_m(\lambda_n a)} \quad n \geq 1 \quad (20b)$$

式(20b)中, $I_m(\lambda_n r)$ 为第一类 m 阶修正 Bessel 函数。不同模态运动引起的特解 $\phi_{lp}^{\Pi}(r, \theta, z)$ 可用式(21)表示

$$\phi_{lp}^{\Pi}(r, \theta, z) = 0 \quad (21)$$

$$\phi_{3p}^{\Pi}(r, \theta, z) = -\frac{i\omega}{2h} \left[(z + h + T)^2 - \frac{r^2}{2} \right] \quad (22)$$

$$\phi_{5p}^{\Pi}(r, \theta, z) = \frac{i\omega \cos \theta}{2h} \left[r(z + h + T)^2 - \frac{r^3}{4} \right] \quad (23)$$

利用内、外子区域交界处压力连续条件,速度连续条件及物面条件,可得求解展开系数 A_{mn}^l, B_{mn}^l 的线性方程组(外域取 $N_1 + 1$ 项近似,内域取 $N_2 + 1$ 项近似)

$$\sum_{n=0}^{N_1} C_{11}^{jn} A_{mn}^l + \sum_{n=0}^{N_2} C_{12}^{jn} B_{mn}^l = b_{j1}^l \quad (24a)$$

$$\sum_{n=0}^{N_1} C_{21}^{jn} A_{mn}^l + \sum_{n=0}^{N_2} C_{22}^{jn} B_{mn}^l = b_{j2}^l \quad (24b)$$

其中

$$C_{11}^{jn} = \frac{K_m(\mu_n a)}{K_m'(\mu_n a)} \times \int_{-(h+T)}^{-T} Y_j(\lambda_j z) Z_n(\mu_n z) dz, n \geq 0 \quad (25)$$

$$C_{12}^{jn} = - \int_{-(h+T)}^{-T} Y_j(\lambda_j z) Y_n(\lambda_n z) dz, n \geq 0 \quad (26)$$

$$C_{21}^{jn} = \mu_n \int_{-(h+T)}^0 Z_j(\mu_j z) Z_n(\mu_n z) dz, n \geq 0 \quad (27)$$

$$C_{22}^{jn} = -\lambda_n V_m'(\lambda_n a) \times \int_{-(h+T)}^{-T} Z_j(\mu_j z) Y_n(\lambda_n z) dz, n \geq 0 \quad (28)$$

$$b_{j1}^l = \int_{-T}^0 \frac{\phi_{lp}^{\Pi}(a, \theta, z)}{\varepsilon_m i^m \cos m\theta} Y_j(\lambda_j z) dz \quad (29)$$

$$b_{j2}^l = \int_{-(T+h)}^{-T} \frac{\partial \phi_{lp}^{\Pi}(r, \theta, z)}{\varepsilon_m i^m \cos m\theta \partial r} \bigg|_{r=a} Z_j(\mu_j z) dz + \int_{-T}^0 \frac{\partial \phi_{lp}^{\Pi}(r, \theta, z)}{\varepsilon_m i^m \cos m\theta \partial r} \bigg|_{r=a} Z_j(\mu_j z) dz \quad (30)$$

3 所需截断项数的讨论

3.1 $h = \pi/k$ 时的截断项数

当半波长大于 $4T$ 时,取 $h = \pi/k$ 。由式(14)可知, $(N_1 - 0.5)\pi \leq \mu_{N_1}(h + T) \leq N_1\pi$,若外域上在 $\mu_{N_1}a = M\pi$ 处截断, $M = 1, 2, \dots$,则所需的 N_1 为

$$N_1 \geq M \left(\frac{T}{a} + \frac{\pi}{ka} \right) \quad (31)$$

由式(18)可知,若内域上也在 $\lambda_{N_2}a = M\pi$ 处截断,则所需的 N_2 为

$$N_2 \geq M \frac{\pi}{ka} \quad (32)$$

因此,深水条件下,当半波长大于 $4T$ 时,外域速度势表达式中所需的截断项数 N_1 为 T/a 和 ka 的函数, T/a 值越大, ka 越小,则所需的截断项数 N_1 也越大。内域速度势表达式中所需的截断项数 N_2 为 ka 的函数, ka 值越小,所需的截断项数 N_2 越大。

3.2 $h = 4T$ 时的截断项数

当半波长小于 $4T$ 时,取 $h = 4T$ 。这时所需的 N_1 和 N_2 为

$$N_1 \geq M \left(\frac{5T}{a} \right) \quad (33)$$

$$N_2 \geq M \frac{4T}{a} \quad (34)$$

可以看出在深水条件下,当半波长小于 $4T$ 时, T/a 越大,所需的截断项数 N_1 和 N_2 越多。

4 算例及结果分析

N_1 和 N_2 大小的选取应保证速度势或水动力系数不随 N_1 和 N_2 的增大而明显变化,经计算结果分析可知,应取 $M \geq 4$ 。

4.1 浅吃水浮式直立圆柱体

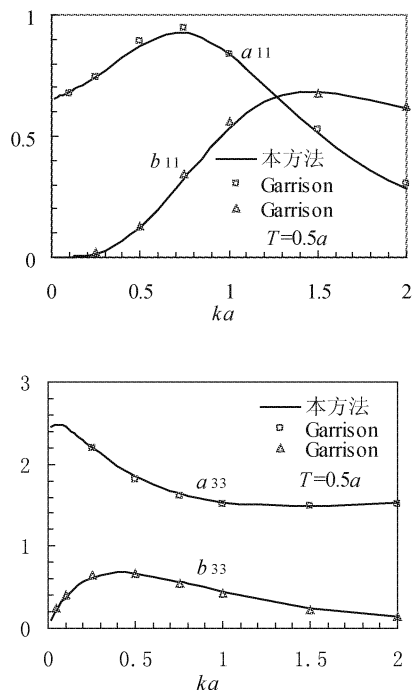


图2 浅吃水直立圆柱体附加质量和阻尼系数

在文献[3]中,将 $d/a = 10$ 时的计算结果近似作为浅吃水 ($T=0.5a$) 浮式直立圆柱体在深水中的结果,经分析可知,参考文献中取 $d/a = 10$,当 $ka \geq 0.33$ 时,水深大于半波长即属深水情况,水动力系数将不受水深的影响。选用文献[3]的浅吃水浮式直立圆柱体,取 $M=4$,则当 $ka < \pi/2$ 时,所需 $N_1 = 2 + 4\pi/ka$, $N_2 = 4\pi/ka$; 当 $ka \geq \pi/2$ 时,所需 $N_1 = 10$, $N_2 = 8$,按本方法计算得到的水动力系数与文献[3]中采用三维边界元法得到的深水状态下的数值结果比较见图2。从图可知,两者吻合较好。

4.2 深吃水浮式直立圆柱体

选用文献[10]中 Minispar 的数据:吃水 $T = 80$ m,半径 $a = 5$ m,实际水深 1 676 m。如所有频率

范围都按实际水深计算,取 $M=4$,则所需的 $N_1 = 1\,341$, $N_2 = 1\,277$,计算较费时。如按本文方法处理,同样取 $M=4$,则当 $ka < 0.049$ 时,所需 $N_1 = 64 + 4\pi/ka$, $N_2 = 4\pi/ka$; 当 $ka \geq 0.049$ 时,所需 $N_1 = 320$, $N_2 = 256$,因此能节省大量的计算时间。假设重心与浮心重合,按本方法计算得到的水动力系数见图3和图4。由图可知,对于深吃水浮式直立圆柱体,其阻尼系数 b_{33} 很小。

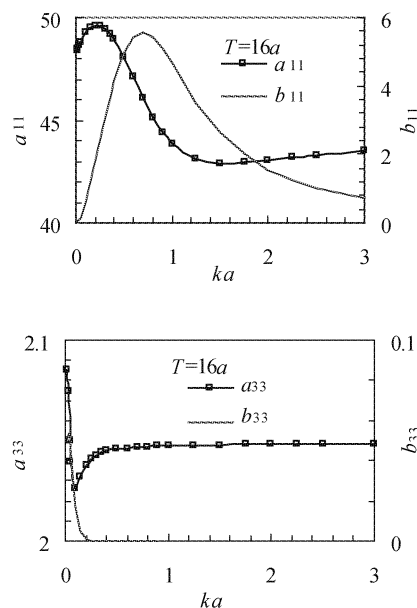


图3 深吃水直立圆柱体附加质量和阻尼系数

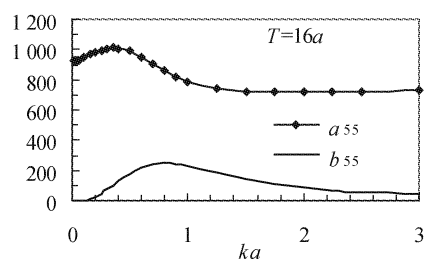


图4 深吃水直立圆柱体纵摇附加质量和阻尼系数

5 结论

根据线性势流理论,分析了水动力系数不受水深影响的计算条件。采用特征函数展开及边界匹配法求解各子区域速度势中的展开系数,从而得到深海中浮式直立圆柱体的水动力系数。计算中内、外

域速度势表达式中的无穷级数项分别取 $N_1 + 1$ 和 $N_2 + 1$ 项近似, N_1 和 N_2 大小的选取应保证速度势不随 N_1 和 N_2 的增大而明显变化, 为了保证一定计算的精度, 要求取 $M \geq 4$ 。算例验证表明, 用本文提出的处理方法能有效地计算深海中浮式直立圆柱体的水动力系数。

参 考 文 献

- 1 Morison J R, O'Brien M P, Johnson J W, *et al.* The force exerted by surface wave on piles. *Petroleum Transactions AIME*, 1950; 189:149—154
- 2 MacCamy R C, Fuchs R A. Wave forces on piles : a diffraction theory. *Tech Mem*, 69, US Army Coastal Engineering Research Center, 1954
- 3 Garrison C J. Hydrodynamics of large objects in the sea, Part II, Motion of free-floating bodies. *Journal of Hydronautics*, 1975; 9 (2):58—63
- 4 Sabuncu T, Calisal S. Hydrodynamic coefficients for vertical circular cylinders at finite depth. *Ocean Engng*, 1981; 8:25—63
- 5 Yeung R W. Added mass and damping of a vertical cylinder in finite-depth waters. *Applied Ocean Research*, 1981; 3(3):119—133
- 6 Bhatta D D, Rahman M. On scattering and radiation problem for a cylinder in water of finite depth. *International Journal of Engineering Science*, 2003; 41:931—967
- 7 杨冠声. 张力腿平台非线性波浪载荷和运动响应研究. 天津: 天津大学学位论文, 2003; 33—47
- 8 陈宏彬, 李远林. 用源分布法求解浅水中二维任意剖面在自由表面上垂荡的附加质量和阻尼系数. *船舶工程*, 1997; 3:8—11
- 9 吴宋仁. 海岸动力学. 北京: 人民交通出版社, 2000
- 10 Fischer F J, Gopalkrishnan R. Some observations on the heave behavior of spar platforms. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 1998; 120:221—225

Hydrodynamic Coefficients for a Floating Vertical Cylinder in Infinite Depth

WANG Dong-jiao, ZHOU Hui

(School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P. R. China)

[**Abstract**] The depth condition which represents the deep water cases in the calculation of the hydrodynamic coefficients is presented. Hydrodynamic coefficients for a floating vertical circular cylinder in water of infinite depth are obtained, and the unknown coefficients in the velocity potentials are solved by the method of matched eigenfunction expansions. The truncation terms needed is also discussed. It is shown that the hydrodynamic coefficients for a vertical circular cylinder floating in water of infinite depth can be obtained effectively by the present method.

[**Key words**] floating vertical cylinder hydrodynamic coefficients infinite depth truncation terms