

组合曲面的 NURBS 插补技术的研究

裴兴林

(酒泉职业技术学院, 酒泉 735000)

摘要 在分析组合曲面构成原理的基础上,将组合曲面分解为若干组合曲线,以非均匀有理 B 样条为工具,利用 NURBS 强大的造型功能表示分解得到的组合曲线,然后对组合曲线进行插补加工。通过对所有分解的曲线的加工达到加工曲面的目的,最后引入误差的控制。通过限定误差的大小来自动调节插补步长的大小,从而调节插补的速度,以达到高速高精度组合曲面加工的目的。

关键词 组合曲面 NURBS 插补

中图分类号 TP391.73; **文献标志码** A

组合曲面是模具、汽车、飞机和动力设备等的重要组成部分,其加工在这些零件的制造中具有重要的地位,一直是数控技术和 CAD/CAM 的主要应用和研究对象。组合曲面的插补和加工是目前数控加工中的一个比较棘手的问题,由于目前 CNC 一般只具有直线、圆弧和少数曲线插补功能,现行曲面加工基本上是通过 CAM 编程产生离散直线轨迹,利用直线插补完成的。这种曲面加工模式在实现高速高精度曲面加工时存在一些难以解决的问题^[1,2]: (1) 加工程序过于庞大,使用困难; (2) 由于零件程序是由外部编程生成的,不便于干预加工过程; (3) 不能实现刀具轨迹实时跟踪显示; (4) 冗余环节多,效率低,可靠性差。相对于单张曲面插补算法来说,组合曲面的插补算法研究得较少。当前常用的方法是将组合曲面的插补按一定的方式转化为单张曲面的插补。本文在分析组合曲面的基础上将组合曲面分解为若干组合曲线,然后用 NURBS 表示这些组合曲线,最后对这些组合曲线进行高速插补,从而达到提高插补速度和插补精度的目的。

2009 年 9 月 28 日收到

作者简介:裴兴林(1975—),男,甘肃酒泉人,讲师,硕士研究生,研究方向:风电、CAD、数控加工等。

1 NURBS 曲线基础

一条 k 次 NURBS 曲线可以表示为一段有理多项式矢函数^[3]:

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)} \quad (1)$$

式(1)中, $\omega_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 称为权或权因子(weights),分别与控制顶点 $d_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 相联系。首末权因子 $\omega_0, \omega_n > 0$, 其余 $\omega_i \geq 0$, 且顺序 k 个权因子不同时为零,以防止分母为零、保留凸包性质及曲线不致因权因子而退化为一。 $N_{i,k}(u)$ 是由节点矢量 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$ 按德布尔-考克斯递推公式决定的 k 次规范 B 样条基函数。递推公式为:

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{其余} \end{cases} \\ N_{i,k} = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{规定 } \frac{0}{0} = 0. \end{cases}$$

NURBS 曲线的次数越高,曲线越光滑,但曲线

与控制点构成的特征多边形的逼近程度也越差,计算量也相对增大,因此一般工程中常使用 3 次 NURBS 曲线插补。

2 组合曲线的 NURBS 表示

将组合曲面分解而得的组合曲线用 NURBS 方法构造的过程称为组合曲线的 NURBS 表示。但是根据已知控制顶点求得的差值曲线往往不够光滑,这样势必会影响到插补时的精度。为减小插补的精度,在插补加工之前经常使用曲线的升阶技术来提升曲线的次数,从而使曲线更加光滑,减小误差。

曲线的升阶方法有许多种,本文采用 Cohen 给出的快速有效的曲线升阶算法,此算法不需要节点差值算法。将 k 阶 NURBS 曲线升阶为 $k+1$ 阶 NURBS 曲线需要新增控制顶点,新的控制顶点 d_i 的计算公式如下:

$$d_i = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^n d_j \Lambda_j^k(i); \quad i=0,1,\dots,n+1 \quad (2)$$

式(2)中: $\Lambda_j^k(i)$ 由下列递推公式给出

$$\alpha_j^0 = \Lambda_j^0 = \begin{cases} 1, u_j \leq u_i \leq u_{j+1} \\ 0, \text{其他。} \end{cases}$$

$$\alpha_j^k(i) = \frac{u_{i+k} - u_j}{u_{j+k} - u_j} \alpha_j^{k-1}(i) + \frac{u_{i+k+1} - u_{i+k}}{u_{j+k+1} - u_{j+1}} \alpha_{j+1}^{k-1}(i);$$

$$\Lambda_j^k(i) = \frac{u_{i+k+1} - u_j}{u_{j+k} - u_j} \Lambda_j^{k-1}(i) + \frac{u_{i+k+1} - u_{i+k+1}}{u_{j+k+1} - u_{j+1}} \Lambda_{j+1}^{k-1}(i) + \alpha_j^k(i)。$$

例如欲求取三次 NURBS 曲线 $p(u)$, 可根据其 $n+1$ 个型值点 $p_i (i=0,1,\dots,n)$ 和相应的 $n+3$ 个权因子 $\omega (i=0,1,2,\dots,n+2)$, 由上述差之条件得出以下方程:

$$p(u_{i+3}) = \frac{\sum_{j=1}^{i+3} d_j N_{j,3}(u_{i+3}) \omega}{\sum_{j=1}^{i+3} N_{j,3}(u_{i+3}) \omega} = p_i;$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

式(3)中:

$$N_{i+3}(u_{i+3}) = \frac{\Delta_{i+3}^2}{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})};$$

$$N_{i+1,i+3}(u_{i+3}) = \frac{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})\Delta_{i+3}}{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})} + \frac{(\Delta_{i+3} + \Delta_{i+4})\Delta_{i+2}}{(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3} + \Delta_{i+4})(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})};$$

$$N_{i+2,3}(u_{i+3}) = \frac{\Delta_{i+2}^2}{(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3} + \Delta_{i+4})(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}。$$

其中 $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$,

添加边界条件: $d_1 - d_0 = \frac{\Delta_3 \omega'_0}{3\omega_1} p'_0$;

$$d_{n+2} - d_{n+1} = \frac{\Delta_{n+2} \omega_{n+1}}{3\omega_{n+2}} p'_n \quad (4)$$

联立方程式(3)、式(4)即可得到式(5)的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ & & & & a_{n+2} & b_{n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n+1} \\ d_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \\ e_{n+2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(5)中: $b_0 = 1; c_0 = -1$;

$$a_{i+1} = \frac{\Delta_{i+3}^2}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}} \omega, (i=0,1,\dots,n);$$

$$b_{i+1} = \left(\frac{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})\Delta_{i+3}}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}} + \frac{(\Delta_{i+3} + \Delta_{i+4})\Delta_{i+2}}{\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3} + \Delta_{i+4}} \right) \omega_{i+1};$$

$(i=0,1,\dots,n);$

$$c_{i+1} = \frac{\Delta_{i+2}^2}{\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3} + \Delta_{i+4}} \omega_{i+2}, (i=0,1,\dots,n);$$

$$a_{n+2} = -1; b_{n+2} = 1; e_0 = -\frac{\Delta_3 \omega_0}{3\omega_1} p'_0;$$

$$e_i = p_{i-1}(a_i + b_i + c_i), (i=1,2,\dots,n,n+1);$$

$$e_{n+2} = \frac{\Delta_{n+2} \omega_{n+1}}{3\omega_{n+2}} p'_n。$$

对线性方程组(5)进行求解,即可求得全部的

控制顶点 $d_i (i = 0, 1, \dots, n+2)$, 从而求得过 $n+1$ 个型值点 $p_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的三次 NURBS 曲线。

3 组合曲线的自适应插补算法

在零件加工过程中, 进给速度是影响加工质量的关键因素, 只有保证进速度的稳定, 才能保证加工零件的表面质量^[4,5]。将上述求得过 $n+1$ 个型值点 $p_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的三次 NURBS 曲线记为参数形式, 即;

$$p(u) = xu, yu, zu \quad (6)$$

曲线参数 u 为时间函数, 记 $u(t_i) = u_i, u(t_{i+1}) = u_{i+1}$ 。将参数 u 对时间 t 进行泰勒展开, 可得到相应的近似算法:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{d_u}{d_t} \Big|_{t=t_i} (t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} \frac{d_u^2}{d_t^2} \Big|_{t=t_i} (t_{i+1} - t_i)^2 + H.O.T. \quad (7)$$

则 1 阶近似表达式为:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{d_u}{d_t} \Big|_{t=t_i} (t_{i+1} - t_i) \quad (8)$$

2 阶近似表达式为:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{d_u}{d_t} \Big|_{t=t_i} (t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} \frac{d_u^2}{d_t^2} \Big|_{t=t_i} (t_{i+1} - t_i)^2 \quad (9)$$

插补算法的速度控制的关键是保证每个插补周期 T 发出的指令增量 ΔL 相等, 假设给定的进给速度为 $V(t)$, 则有:

$$Vt = \frac{d_L}{d_t} = \left(\frac{d_L}{d_u} \right) \left(\frac{d_u}{d_t} \right) \quad (10)$$

$$\therefore \frac{d_u}{d_t} = \frac{V(t)}{d_L/d_u} \quad (11)$$

式(11)中: $\frac{d_L}{d_u} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$,

且 $x = p_x(u), y = p_y(u), z = p_z(u)$,

$$x' = \frac{dp_x(u)}{d_u}, y' = \frac{dp_y(u)}{d_u}, z' = \frac{dp_z(u)}{d_u}。$$

$\therefore$ 由上几式可得

$$\frac{d_u}{d_t} = \frac{V(t)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} \quad (12)$$

将式(12)代入式(8)可求得下一插补点的 1 阶近似表达式为:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{TV(t)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}。$$

在上述的插补算法中, 插补速度恒定, 但是插补过程中以直线代替圆弧的方式必定会在插补过程中产生弓高误差, 而且弓高误差的大小还会随着曲线曲率的变化而变化, 甚至超出误差的允许范围。为避免这种情况的发生, 必须引入轮廓误差控制, 其基本思想是: 在插补中实时监控弓高误差的大小, 当误差在允许的范围时, 仍按给定进给速度计算进给步长, 实现恒速运动; 若误差超出了允许范围, 则按允许误差求取约束插补步长, 使插补步长能随着曲率变化而自动调整, 以确保插补的弓高误差控制在允许的范围时, 从而自动调整插补的速度。

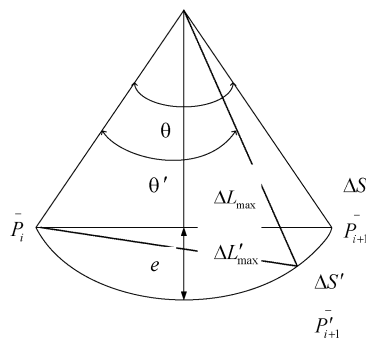


图1 弓高误差分析

如图1所示, 设弓高误差为 e , 允许误差为 ε , 当 $e \leq \varepsilon$ 时, 可按当前插补步长 ΔL 进行插补; 当 $e \geq \varepsilon$ 时, 则应减小插补步长, P_{i+1}' 为减小步长后的参数点, 则:

$$\frac{\Delta L_{\max}'}{\Delta L_{\max}} = \frac{\Delta S'}{\Delta S} = \frac{R\theta'}{R\theta} = \frac{\theta'}{\theta} \quad (13)$$

$$\frac{\varepsilon}{e} = \frac{R(1 - \cos \frac{\theta'}{2})}{R(1 - \cos \frac{\theta}{2})} \approx \left(\frac{\theta'}{\theta} \right)^2 \quad (14)$$

由上两式可知:

$$\Delta L_{\max}' = \Delta L_{\max} \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}}。$$

由上式即可求得新插补点的插补步长 $\Delta L_{\max}'$, 从而可求得满足误差要求的新的插补点 P_{i+1}' 。

4 结 论

NURBS 方法以其具有非有理 B 样条、有理贝齐尔、非有理贝齐尔方法的共同特点及自身所具有的特性而引起人们的关注,大量的基于 NURBS 的实用造型系统正在不断得到发展。本文将难于直接插补加工的组合曲面分解为组合曲线,利用 NURBS 曲线强大的造型技术得出组合曲线的数学模型,然后对组合曲线进行插补加工,间接达到加工组合曲面的目的。同时,在组合曲线插补过程中引进轮廓误差控制,不仅可以保证组合曲线插补过程中的弓高误

差满足误差要求,还可以根据弓高误差的大小自动调节进给步长,从而改变插补的速度,达到实时高效的组合曲面插补加工。

参 考 文 献

- 1 蒋四军,胡思节. 基于非均匀有理 B 样条的凸轮轴插补算法. 机械与电子,2006;(9):15—17
- 2 郑蓉建. 基于复杂曲线插补的数控关键技术的研究与实现. 秦皇岛:燕山大学,2006
- 3 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京:高等教育出版社,2005
- 4 谢明红,叶 丽. NURBS 曲线的数控高速插补算法. 河南理工大学学报,2008;(6):307—313
- 5 Leiwt,SUNG M P,LIN L Y,*et al.* Fast real-time NURBS path interpolation for CNC machine tools. International Journal of Machine Tools & Manufacture. 2007;47(10):1530—1541

Research on NURBS Interpolation of Combined Surface

PEI Xing-lin

(Jiuquan Vocational and Technical College,Jiuquan 735000,P. R. China)

[Abstract] The combined surface is decomposed into a number of combination curve on the basis of analyzing the principle of combined surface. A non-uniform rational B-spline as a tool, use the powerful modeling capabilities of NURBS to express the combined curve and then Interpolate it. Through the decomposition of the curve for all the processing to achieve the purpose of processing of surfaces. At last lead into the error control,automatically adjust the size of the interpolation step through limit the size of the error to achieve the combination of high speed and precision surface processing purposes.

[Key words] combined surface NURBS interpolation