

## 仪表技术

# 高阶椭圆齿轮副节曲线的参数化设计

刘永平 孟鹏飞 \*

(兰州理工大学数字制造技术与应用省部共建教育部重点实验室,机电工程学院,兰州 730050)

**摘要** 利用 MATLAB 软件根据对非圆齿轮的啮合原理,对最常见的节曲线封闭的高阶椭圆齿轮副节曲线进行设计,并且讨论了其凹凸性。最后运用三次样条插值对其节曲线进行了研究,为后续的设计制作提供了一定的依据。

**关键词** Matlab 非圆齿轮 高阶椭圆齿轮 三次样条插值

**中图法分类号** TH132. 424; **文献标志码** A

非圆齿轮传动作为一种特殊的机械传动形式,它不但具有齿轮的传动优点,而且可以代替传统的凸轮、连杆变速比结构。因此,非圆齿轮的应用前景相当广阔。早在 20 世纪三四十年代非圆齿轮就已经出现。但是由于其种类繁多、节曲线及齿廓的设计计算困难等问题一直阻碍了非圆齿轮的发展。随着计算机软件及硬件技术以及数控机床的飞速发展,非圆齿轮的设计加工的问题也得到了初步的改善<sup>[1-3]</sup>。

非圆齿轮机构具有实现非匀速比传动的优点。由于非圆齿轮的节曲线为非圆形,使得非圆齿轮设计变得复杂,将计算模拟及交互技术引入非圆齿轮的设计,大大减轻设计的工作量,并且可以有效地预测设计结果。椭圆齿轮是最常见的节曲线封闭的非圆齿轮,在一些纺织机械、造纸机械、卷烟和往复输送机等机器中都有应用。本文利用 Matlab 软件,针对非圆齿轮传动中最常见的椭圆齿轮传动副的节曲线进行设计<sup>[4-6]</sup>。

## 1 高阶椭圆齿轮的数学模型

根据文献<sup>[1]</sup>中非圆齿轮的理论可知,对于高阶椭圆齿轮,当模数  $m$ 、阶数  $n_1$ 、齿数  $z_1$ 、主动轮偏心率  $k_1$  确定后,式(1):

$$\begin{cases} L = 4n_1A_1M_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K_1 \sin^2 \phi_1} d\phi_1 \\ L = \pi mz_1 \end{cases} \quad (1)$$

在 Matlab 中采用 quad8 高阶数值积分法,对椭圆积分进行数值积分求解,可以得到主动轮的长半轴  $A_1$ ,即:

$$A_1 = \frac{\pi mz_1}{4n_1M_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K_1 \sin^2 \phi_1} d\phi_1} \quad (2)$$

式(2)中:

$$M_1 = -\frac{\sqrt{1 + k_1^2(n_1^2 - 1)}}{n_1}; K_1 = \frac{n_1^2 k_1^2}{1 + k_1^2(n_1^2 - 1)}.$$

根据角度  $\theta_1$  和  $\phi_1$  的关系,得到:

$$\begin{cases} \cos n_1 \theta_1 = \frac{k_1 + \sin \phi_1}{1 + k_1 \sin \phi_1} \\ \sin n_1 \theta = \frac{\sin \phi_1 \sqrt{1 - k_1^2}}{1 + k_1 \sin \phi_1} \end{cases} \quad (3)$$

可得  $\theta_1$  的微分方程:

2009 年 9 月 27 日收到

第一作者简介:刘永平,副教授,硕士研究生导师。

\* 通信作者简介:孟鹏飞,机电工程学院硕士。研究方向:机械制造及其自动化。E-mail:mpf03c10420@163.com。

$$d\theta_1 = -\frac{\sqrt{1-k_1^2}}{n_1(1+k_1 \sin \phi_1)} d\phi_1 \quad (4)$$

利用数值法,在 Matlab 中编程解析式(4),即可以得到主动轮的节曲线方程

$$\begin{cases} r_1 = \frac{p_1}{1 - k_1 \cos n_1 \theta_1} \\ p_1 = A_1(1 - k_1^2) \end{cases} \quad (5)$$

同理可得到从动轮的节曲线方程:

$$\begin{cases} r_2 = \frac{p_2}{1 + k_2 \cos n_2 \theta_2} \\ p_2 = \frac{n^2 p_1}{\sqrt{n^2 - k_1^2(n^2 - 1)}} \\ k_2 = \frac{k_1}{\sqrt{n^2 - k_1^2(n^2 - 1)}} \end{cases} \quad (6)$$

由于  $n_1$  阶的高阶椭圆节曲线是封闭的,在  $\theta_1 = 0 \sim 2\pi$  范围内,  $r_1$  变化  $n_1$  个周期。若要求齿轮 2 在  $\theta_2 = 0 \sim 2\pi$  范围内,  $r_2$  变化  $n_2$  个周期,且令  $\frac{n_2}{n_1} = n$ , 则节曲线的封闭条件为:

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{\frac{2\pi}{n_1}} \frac{r_1}{a - r_1} d\theta_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{n_1}} \frac{p_1}{a(1 - k_1 \cos n_1 \theta_1) - p_1} d\theta_1 \quad (7)$$

式(7)积分解析可以得到中心距  $a$ :

$$a = A_1(1 + \sqrt{n^2 - k_1^2(n^2 - 1)}) \quad (8)$$

齿轮副的传动比:

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a}{r_1} - 1 = [k_1(k_1 - \cos n_1 \theta_1) + (1 - k_1 \cos n_1 \theta_1) \sqrt{n^2 - k_1^2(n^2 - 1)}] \times (1 - k_1^2)^{-1} \quad (9)$$

## 2 高阶椭圆齿轮节曲线曲率半径及凸性检验

椭圆齿轮的节曲线不是圆的,因此其上各点处的曲率半径都不同,根据微分几何,由文献[1]可知,要使得节曲线上不出现内凹,就必须使其每点的曲率大于 0。而当  $\cos n_1 \theta_1 = 1$  时,曲率最难满足,此时条件为:

$$k_1 \leq \frac{1}{n_1^2 - 1} \quad (10)$$

主动轮节曲线的最小曲率半径及无内凹的条件分别为

$$\rho_{1\min} = \frac{p_1}{1 + k_1(n_1^2 - 1)} \quad (11)$$

从动轮节曲线的最小曲率半径及无内凹的条件分别为

$$\rho_{2\min} = \frac{p_2}{1 + k_2(n_2^2 - 1)} \quad (12)$$

$$k_2 \leq \frac{1}{n_2^2 - 1} \quad (13)$$

## 3 程序编制

根据以上的算法,利用 Matlab 软件编写的主动轮节曲线 M 文件 feiyuanchilun .m,程序的基本过程如下:

(1) 基本参数输入。包括齿数  $z$ ,偏心率  $k$ ,模数  $m$ ,阶数  $n$ 。

(2) 曲率半径的计算机凹凸检验。根据判别式(10~13)。

(3) 参数计算。计算绘制节曲线的长半轴  $A$ ,并求解  $\theta$  与  $\phi$  间的关系。

(4) 计算节曲线图形。并利用三次样条曲线进行拟合。

(5) 绘制节曲线。

根据以上的程序,便可生产任意阶数的椭圆齿轮的节曲线。在 Matlab 命令窗口输入:feiyuanchilun(13,0.3,2,3),生成如图 1 所示。

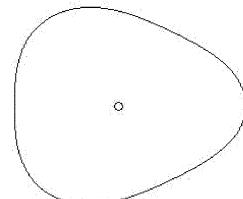


图 1 三阶非圆齿轮节曲线

根据以上的理论基础,也可生成从动轮的节曲线图形,因此,整个非圆齿轮副节曲线如图 2 示。

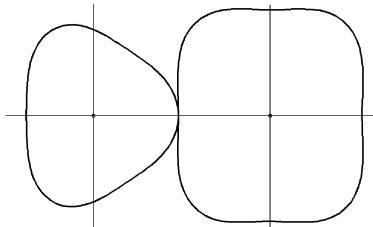


图2 二阶和三阶齿轮传动副的节曲线

#### 4 结束语

本文利用 Matlab 强大的计算功能对高阶椭圆齿轮节曲线进行精确求解,并采用三次样条曲线进行了拟合,使得非圆齿轮节曲线的设计计算变得精确简单,还能动态直观的显示设计结果。为后续的齿形形成、数控加工奠定良好的基础。

#### 参 考 文 献

- 1 吴序堂,王贵海.非圆齿轮及非匀速传动.北京:机械工业出版社,1997;1—52
- 2 李建刚,吴序堂,熊镇芹,等.非圆齿轮离散节曲线的分段三次样条拟合研究.机械传动,2004;28(06):3—5
- 3 刘永平,吴序堂,李鹤岐.常见的凸封闭节曲线非圆齿轮副设计.农业机械学报,2007;38 (06):143—146
- 4 Bair B W. Computer aided design of elliptical gears. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 2002; 124 ( 6 ): 787—793
- 5 刘生林,黄先祥,吴序堂.用三次样条进行非圆齿轮节曲线设计的研究.机械传动,1999;5:20—21
- 6 周 娜,何 丽,许纪倩.基于 MATLAB 的非圆齿轮节曲线设计.机电产品开发与创新,2007;20(01):7—8

## Parametric Design of the Pitch Curves of Higher-order Elliptic Gears

LIU Yong-ping, MENG Peng-fei \*

(Key Laboratory of Digital Manufacturing Technology and Application, the Ministry of Education,  
School of Mechanical & Electromechanical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, P. R. China)

**[Abstract]** According to the meshing theory of non-circular gear, adopted MATLAB to study the higher-order elliptic which is the most common close convex pitch curves, and discussed the bump. Finally, the subsection cubic spline interpolation is used to analyze the pitch curves which provide a method for the further work.

**[Key words]** MATLAB      non-circular gears      higher-order elliptic gears      the subsection cubic spline interpolation