第 10 卷 第 1 期 2010 年 1 月
1671—1815(2010)1-0176-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 1 Jan. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

一类具垂直传染 SIS 传染病模型的全局稳定性

张 辉 冯 锋[1]

(第二炮兵工程学院基础部,西安 710025;西安邮电学院应用数理系[1],西安 710121)

摘 要 研究了一类具有常数出生、垂直传染和一般接触率 β(N) 的 SIS 传染病模型。利用 Bendixson - Dulac 判别法证明了当垂直传染率 $0<p<1$ 或 $p=0,R_0>1$ 时,地方病平衡点 E^* 或 E_1^* 全局渐近稳定,疾病流行形成地方病。运用 Liapunov 函数方法证明了当 $p=0,R_0\leqslant 1$ 时,无病平衡点 E_0 全局渐近稳定,疾病最终消失。并通过 Matlab 进行数值模拟。

关键词 垂直传染 一般接触率 全局渐近稳定 基本再生数 闭轨线

中图法分类号 O175.13; **文献标志码** A

传染病动力学就是根据疾病发生、发展和环境变化等情况,建立能反映其变化规律的数学模型。通过对模型动力学性态的研究来显示疾病的发展过程,预测其流行规律和发展趋势,分析疾病流行的原因和关键词,寻求对其进行预防和控制的最优策略。1927 年,Kermark 和 Makendrick 建立了著名的 SIR 仓室模型[1]。在此之后,这种仓室思想在实际生活之中得到了很大发展。随着 SARS、禽流感和甲型 H1N1 流感等疾病的相继爆发和流行,传染病动力学系统的研究近期又成为了一个热点。在文献[2]基础上,本文建立和研究了一类具有常数出生、垂直传染和一般接触率 $\beta(N)$ [3—5]的 SIS 传染病模型的全局渐近稳定性,其中 $\beta(N)$ 满足

(1) $\beta(N)>0$; (2) $\beta'(N))\leqslant 0$;

(3) $[N\beta(N)]'\geqslant 0$。

1 基本模型

将人群分为易感者 S 和染病者 I 两类。记 $N=S+I$,建立具有常数出生、垂直传染和一般接触率 $\beta(N)$ 的 SIS 传染病模型仓室结构,如图 1 所示。

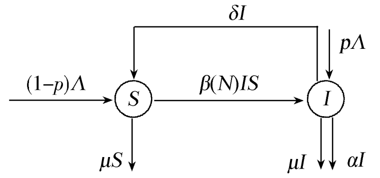

图 1 SIS 传染病模型仓室结构示意图

图 1 中,Λ 为人口常数出生率,μ 为自然死亡率,α 为 I 的因病死亡率,δ 为 I 的治愈率,p 为人口常数出生进入 I 的垂直传染率;$0\leqslant p<1$,其余参数均为正数。

根据传染病动力学仓室建模思想可以得到 SIS 传染病模型:

$$\begin{cases} S'=(1-p)\Lambda-\beta(N)IS-\mu S+\delta I \\ I'=p\Lambda+\beta(N)IS-(\mu+\alpha+\delta)I \end{cases} \tag{1}$$

总人口方程为

$$N'=\Lambda-\mu N-\alpha I \tag{2}$$

把 $S=N-I$ 代入方程(1)并结合式(2),得到式(1)的等价系统

$$\begin{cases} I'=p\Lambda+\beta(N)(N-I)I-(\mu+\alpha+\delta)I \\ N'=\Lambda-\mu N-\alpha I \end{cases} \tag{3}$$

则域 $G=\left\{(I,N)\mid 0\leqslant I\leqslant N\leqslant\dfrac{\Lambda}{\mu}\right\}$ 是模型式(3)的一个正向不变紧集。

2009 年 09 月 18 日收到 陕西省教育厅科研计划项目(08JK432)资助

第一作者简介:张 辉(1982—),男,硕士,助教,研究方向:生物数学与计算机仿真。E-mail:zhanghui4958@163.com。

2　情形:$0<p<1$ 时,模型的全局稳定性

当 $0<p<1$ 时,这意味着人口的常数出生不仅含有易感者,而且也有染病者。此时,模型式(3)不存在无病平衡点。为求其地方病平衡点 $P^*=(I^*,N^*)$,解方程组:

$$\begin{cases} p\Lambda+\beta(N)(N-I)I-(\mu+\alpha+\delta)I=0 \\ \Lambda-\mu N-\alpha I=0 \end{cases} \tag{4}$$

通过(4)式可得关于 N 的方程

$$f(N)=\frac{p\alpha\Lambda}{\Lambda-\mu N}+\left(1+\frac{\mu}{\alpha}\right)\beta(N)N-\frac{\Lambda}{\alpha}\beta(N)-(\mu+\alpha+\delta)。$$

由条件式(2)和式(3)可知,$f(N)$ 是严格单增连续函数。且 $f(0)=p\alpha-\frac{\Lambda}{\alpha}\beta(0)-(\mu+\alpha+\delta)<0$,

$$f\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)=+\infty。$$

由零点存在定理,$f(N)$ 在 $\left(0,\frac{\Lambda}{\mu}\right)$ 内存在唯一解 N^*。于是有

定理 1　当 $0<p<1$ 时,模型(3)式总存在唯一地方病平衡点 $E^*=(I^*,N^*)$,而不存在无病平衡点。

关于 E^* 的全局稳定性,我们有

定理 2　当 $0<p<1$ 时,E^* 局部渐近稳定。

证明　模型式(3)在 $E^*=(I^*,N^*)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E^*)=\begin{bmatrix} -\beta(N^*)I^* & a_{12} \\ -\alpha & -\mu \end{bmatrix}。$$

其中 $a_{12}=-\beta'(N^*)I^{*2}+[\beta'(N^*)N^*+\beta(N^*)]I^*>0$。即 $J(E^*)$ 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 满足

$$\lambda_1+\lambda_2=-\mu-\beta(N^*)I^*<0,$$

$$\lambda_1\lambda_1=\mu\beta(N^*)I^*+\alpha a_{12}>0。$$

从而,λ_1 和 λ_2 均具有负实部。因此,当 $0<p<1$ 时,E^* 局部渐近稳定。

定理 3　当 $0<p<1$ 时,E^* 在 G 的内部 $\overset{o}{G}=\left\{(I,N)\mid 0<I<N<\frac{\Lambda}{\mu}\right\}$ 是全局渐近稳定。

证明　构造 Dulac 函数 $B=\frac{1}{I}$,令 $P=p\Lambda+\beta(N)(N-1)I-(\mu+\alpha+\delta)I$,$Q=\Lambda-\mu N-\alpha I$,则 $\frac{\partial(BP)}{\partial I}+\frac{\partial(BQ)}{\partial N}=-\frac{p\Lambda}{I^2}-\beta(N)-\frac{\mu}{I}<0$。

由 Bendixson-Dulac 判别法[6],模型式(3)在 $\overset{o}{G}$ 内不存在闭轨线。再由定理 2 得,当 $0<p<1$ 时,E^* 在 $\overset{o}{G}$ 内是全局渐近稳定。

3　情形:$p=0$ 时,模型的全局稳定性

当 $p=0$ 时,这意味着人口的常数出生不含有染病者。此时,模型式(3)变为

$$\begin{cases} I'=\beta(N)(N-I)I-(\mu+\alpha+\delta)I \\ N'=\Lambda-\mu N-\alpha I \end{cases} \tag{5}$$

模型式(5)存在唯一无病平衡点 $E_0=\left(0,\frac{\Lambda}{\mu}\right)$。为求其地方病平衡点 $E_1^*=(I_1^*,N_1^*)$,解方程组:

$$\begin{cases} \beta(N)(N-I)I-(\mu+\alpha+\delta)I=0 \\ \Lambda-\mu N-\alpha I=0 \end{cases} \tag{6}$$

定义基本再生数

$$R_0=\frac{\Lambda}{\mu}\beta\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\frac{1}{\mu+\alpha+\delta}。$$

通过式(6)可得关于 N 的方程

$$g(N)=\left(1+\frac{\mu}{\alpha}\right)\beta(N)N-\frac{\Lambda}{\alpha}\beta(N)-(\mu+\alpha+\delta)。$$

由 $\beta(N)$ 满足的条件式(2)和式(3)可知,$g(N)$ 是严格单增连续函数,且 $g(0)=-\frac{\Lambda}{\alpha}\beta(0)-(\mu+\alpha+\delta)<0$,

$g\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)=(\mu+\alpha+\delta)(R_0-1)$。当 $R_0>1$ 时,由零点存在定理,$g(N)$ 在 $\left(0,\frac{\Lambda}{\mu}\right)$ 内存在唯一解 N_1^*。于是

定理 4　当 $R_0\leq 1$ 时,模型式(5)仅存在唯一无病平衡点 $E_0=\left(0,\frac{\Lambda}{\mu}\right)$;当 $R_0>1$ 时,模型式(5)不仅

存在 E_0，而且还存在唯一地方病平衡点 $E_1^* = \left(\frac{\Lambda - \mu N_1^*}{\alpha}, N_1^*\right)$。

关于 E_0 和 E_1^* 的全局稳定性，我们有

引理 5 模型式(5)从 $\left\{(0,N) \mid 0 \leqslant N \leqslant \frac{\Lambda}{\mu}\right\}$ 内出发的轨线沿 N－轴趋近 $\left(0,\frac{\Lambda}{\mu}\right), t \to +\infty$。

定理 6 当 $R_0 > 1$ 时，E_1^* 在 $G - \left\{(0,N) \mid 0 \leqslant N \leqslant \frac{\Lambda}{\mu}\right\}$ 内全局渐近稳定。

证明 类似定理 2 和定理 3 的证明。

定理 7 当 $R_0 < 1$ 时，E_0 局部渐近稳定；当 $R_0 = 1$ 时，E_0 稳定；当 $R_0 > 1$ 时，E_0 不稳定。

证明 模型式(5)在 $E_0 = \left(0,\frac{\Lambda}{\mu}\right)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} \frac{\Lambda}{\mu}\beta\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) - (\mu + \alpha + \delta) & 0 \\ -\alpha & -\mu \end{bmatrix}$$

其两个特征值为 $\lambda_1 = (\mu + \alpha + \delta)(R_0 - 1)$，$\lambda_2 = -\mu < 0$。

当 $R_0 < 1$ 时，$\lambda_1 < 0$，即 E_0 局部渐近稳定。

当 $R_0 = 1$ 时，$\lambda_1 = 0$。$J(E_0)$ 的特征矩阵 $\lambda I - J(E_0)$ 的不变因子是 1 和 $\lambda(\lambda + \mu)$。即对应 $\lambda_1 = 0$ 的初等因子是 λ 且是单重，从而 E_0 稳定。

当 $R_0 > 1$ 时，$\lambda_1 > 0$。即 E_0 不稳定。

定理 8 当 $R_0 \leqslant 1$ 时，E_0 在域 G 内全局渐近稳定。

证明 取 Liapunov 函数 $V = I$，则 V 沿模型式(5)轨线的全导数为

$$V' = -\beta(N)I^2 + [N\beta(N) - (\mu + \alpha + \delta)]I \leqslant -\beta\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)I^2 + \left[\frac{\Lambda}{\mu}\beta\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) - (\mu + \alpha + \delta)\right]I = -\beta\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)I^2 + (\mu + \alpha + \delta)(R_0 - 1)I。$$

当 $R_0 \leqslant 1$ 时，$V' \leqslant 0$。当且仅当 $I = 0$，$V' = 0$。即模型式(5)在 $F = \{(I,N) \in G \mid V' = 0\}$ 中的最大不变集为 $\{(0,N) \mid 0 \leqslant N \leqslant \frac{\Lambda}{\mu}\}$。由 LaSalle 不变集原理[7]，当 $t \to +\infty$ 时，模型式(5)的解均有 $I \to 0$。由此可知，模型式(5)的极限系统[1]为

$$\begin{cases} I' = 0 \\ N' = \Lambda - \mu N \end{cases} \tag{7}$$

又系统式(7)的平衡点 $\left(0,\frac{\Lambda}{\mu}\right)$ 全局渐近稳定，即 E_0 在 G 内是全局吸引的。再由引理 5 和定理 7，故 $R_0 \leqslant 1$ 时，E_0 在 G 内全局渐近稳定。

注：当 $\beta(N) = \beta$ 为一正常数时，即为双线性发生率；当 $\beta(N) = \frac{\beta}{N} = (\beta > 0)$ 时，即为标准发生率。

4 数值模拟

取函数 $\beta(N) = \frac{kN/3}{1 + 10N/3 + \sqrt{1 + 20N/3}}$ 和 $\Lambda = 0.6$，$\mu = 0.05$，$\alpha = 0.1$，$\delta = 0.17$，并取相同六组初值 (1,5)，(2,6)，(2.7,6.8)，(4.6,8.4)，(3.4,9.7)，(5,11)。当 $p = 0.04$，$k = 0.4$ 时，如图 2 所示，$E^* = (0.890\ 1, 10.219\ 7)$ 全局渐近稳定；当 $p = 0$，$k = 0.25$ 时，$R_0 = 0.75$，如图 3 所示，$E_0 = (0.12)$ 全局渐近稳定；当 $p = 0$，$k = 0.4$ 时，$R_0 = 1.2$，如图 4 所示，$E_1^* = (0.624\ 6, 10.750\ 8)$ 全局渐近稳定。

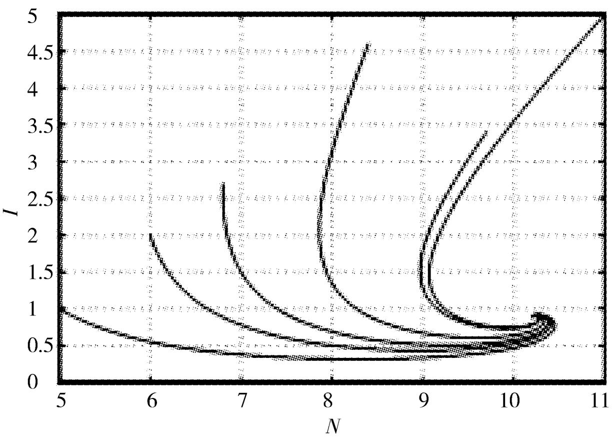

图 2 $p = 0.04$，$k = 0.4$ 时，I 和 N 的轨线变化

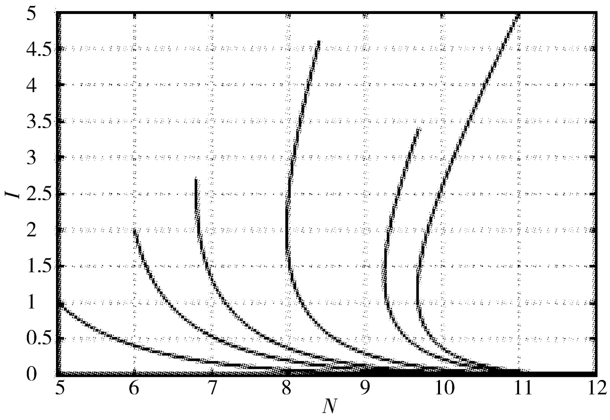

图 3　$p=0, k=0.25$ 时,I 和 N 的轨线变化

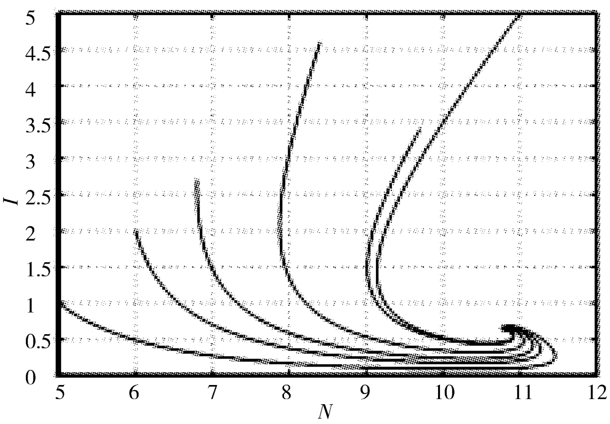

图 4　$p=0, k=0.4$ 时,I 和 N 的轨线变化

参 考 文 献

1　马知恩,周义仓,王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究. 北京:科学出版社,2004

2　徐文雄,张仲华,成　芳. 一类 SIS 流行病传播数学模型全局渐近稳定性. 四川师范大学学报,2004;27(6):585—588

3　李健全,张　娟,马知恩. 一类带有一般接触率和常数输入的流行病模型的全局分析. 应用数学与力学,2004;25(4):359—367

4　Brauer F, van den Driessche P. Models for transmission ofdisease with immigration of infectives. Mathematical Bio-sciences, 2001; 171 (2): 143—154

5　Li Guihua, Jin Zhen. Global stability of an SEI epidemic model with general contact rate. Chaos, Solitons and Frac-tals, 2005; 23 (3): 997—1004

6　马知恩,周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法. 北京:科学出版社,2001

7　Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynam-ical systems and chaos. New York: Springer, 2003

Global Stability of a SIS Epidemic Model with Vertical Transmission

ZHANG Hui, FENG Feng[1]

(Department of Basic Courses, the Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, P. R. China;

Department of Applied Mathematics and Physics, Xi'an Institute of Posts of Telecom[1], Xi'an 710121, P. R. China)

[**Abstract**]　A SIS epidemic model with constant birth, vertical transmission and general contact rate $\beta(N)$ is studied. By using Bendixson-Dulac discriminance, it is proved that the endemic equilibrium E^* or E_1^* is globally asymptotically stable if $0<p<1$ or $p=0$; $R_0>1$, respectively, and the disease spreads to the endemic. The disease -free equilibrium E_0 is globally asymptotically stable by Liapunov function method if $p=0$; $R_0 \leqslant 1$ and the disease always dies out eventually. And numerical simulation is carried out by Matlab.

[**Key words**]　vertical transmission　general contact rate　globally asymptotically stable　basic reproductive　number closed trajectory