第10卷 第1期 2010年1月
1671—1815(2010)1-0006-06
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 10 No. 1 Jan. 2010

二阶脉冲奇异微分方程两点边值问题正解的存在性

吴娟娟 闫宝强

(山东师范大学数学科学学院,济南 250014)

摘 要 利用全连续算子的不动点定理,研究了二阶非线性脉冲奇异微分方程两点边值问题正解的存在性。

关键词 脉冲奇异微分方程 全连续算子 Schauder 不动点定理 正解

中图法分类号 O175.8; **文献标志码** A

研究以下二阶脉冲微分方程两点边值问题正解的存在性

$$\begin{cases} -u''(t)=f(t,u(t),u'(t)), & t\neq t_k, \\ \Delta u|_{t=t_k}=I_{0,k}(u(t_k),u'(t_k-)), & k=1,2,\cdots,m+1 \\ \Delta u'|_{t=t_k}=-I_{1,k}(u(t_k),u'(t_k-)), & \\ u(0)=0,u'(t_{m+1})=0 & \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中 $\Delta u|_{t=t_k}=u(t_k+)-u(t_k-)$。$\Delta u'|_{t=t_k}=u'(t_k+)-u'(t_k-)$,$u(t)$在 t_k 左连续,$f(t,x,y)\in C((0,t_{m+1})\times(0,+\infty)\times(0,+\infty),(0,+\infty))$,同时不但$f(t,x,y)$在 $t=0,x=0,y=0$ 具有奇异性,而且 $I_{0,k}(x,y)$,$I_{1,k}(x,y)$在 $x=0,y=0$ 也具有奇异性。记 $J=[0,t_{m+1}]-\{t_1,t_2,\cdots,t_{m+1}\}$。$PC(J,R)=\{u\colon J\to R|u(t)$在 J 上连续,且 $u(t_k-)$与 $u(t_k+)$均是存在的$\}$。

1 引理

引理 1[1] 在范数 $\|\cdot\|$ 下,$PC(J,R)$是 Banach 空间。

我们说$f(t,x,y)$在 $x=0$ 具有奇异性是指

$$\lim_{x\to 0^+}f(t,x,y)=+\infty。$$

对任意的 $t\in[a,b]\subseteq(0,+\infty)$和 $y\in(0,+\infty)$一致成立。同样地我们说$f(t,x,y)$在 $y=0$ 具有奇异性是指

$$\lim_{y\to 0^+}f(t,x,y)=+\infty \quad (2)$$

对 $\forall t\in[a,b]\subseteq(0,+\infty)$及 $x\in(0,+\infty)$一致成立。

设$f\in C((0,t_{m+1})\times(0,+\infty)\times(0,+\infty),(0,+\infty))$,$I_{0,k}$,$I_{1,k}\in C((0,+\infty),(0,+\infty))$,$F_k$,$G_k\in C((0,+\infty),(0,+\infty))$,$F,G\in C((0,+\infty),(0,+\infty))$,$f(t,x,y)\leqslant k(t)F(x)G(y)$,$I_{1,k}(x,y)\leqslant \gamma_{1,k}F_k(x)G_k(y)$,$\gamma_1,k>0$。$k=1.2,\cdots,m$。且下面条件成立。

(H_1) $F(x)$是单调递减函数,即若 $x_1\leqslant x_2$,则一定有 $F(x_1)\geqslant F(x_2)$;

(H_2) $\overline{\lim_{y\to+\infty}}G(y)<+\infty$;

(H_3) $\dfrac{1}{G}\in L[1,t_{m+1}]$;

(H_4) $F_k(x)$是单调递减函数,也就是说,若$x_1\leqslant x_2$,则一定有 $F_k(x_1)\geqslant F_k(x_2)$;

(H_5) $\overline{\lim_{y\to+\infty}}G_k(y)<+\infty$。

定 义 $\sup G_k\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right)=\sup\limits_{y\geqslant\frac{1}{n}}G_k(y)$,$\sup G\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right)=\sup\limits_{y\geqslant\frac{1}{n}}G(y)$,由条件($H_2$)和($H_5$),对

2009年9月18日收到 国家自然科学基金(10871120)、山东省教育厅基金(J07WH08)、山东省自然科学基金(Y2008A06)资助

任意的 $z\in(0,t_{m+1})$,$\sup G([z,t_{m+1}))=\sup\limits_{y\in[z,t_{m+1})}G(y)<+\infty$ 和 $\sup G[\frac{1}{n},t_{m+1})=\sup\limits_{y\geqslant\frac{1}{n}}G(y)$。

定义 1 $u(t)$ 是式(1)的解是指 $u(t)$ 在 J 上二阶可导。$u'(t_k-0)$ 与 $u'(t_k+0)$ 存在,$u(t_k)=u(t_k-)$ 和 $u(t_k+)$ 存在,且满足

$$\begin{cases}-u''(t)=f(t,u,u'),t\neq t_k,\\ \Delta u|_{t=t_k}=I_{1,k}(u(t_k),u'(t_k-)),k=1,2,\cdots,m+1,\\ \Delta u'|_{t=t_k}=-I_{1,k}(u(t_k),u'(t_k)),\\ u(0)=0,u'(t_{m+1})=0。\end{cases}$$

定义 2 $P=\{x\in PC(J,R)\mid x(t)\geqslant 0,\ \forall t\in J\}$,对于 $x\in P$,定义算子

$$(Tx)(t)=\begin{cases}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s,t\in[0,t_1),\\ \int_0^t x(s)\mathrm{d}s+I_{0,1}((Tx)(t_1),x(t_1-)),t\in(t_1,t_2],\\ \vdots\\ \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s+I_{0,1}((Tx)(t_1),x(t_1-))+\\ \qquad\cdots+I_{0,m-1}((Tx)(t_{m-1}),\\ \qquad x(t_{m-1}-)),t\in(t_{m-1},t_m],\\ \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s+I_{0,1}((Tx)(t_1),x(t_1-))+\\ \qquad\cdots+I_{0,m-1}((Tx)(t_{m-1}),x(t_{m-1}-)+\\ \qquad I_{0,m}((Tx)(t_m),x(t_{m-1})),\\ \qquad t\in(t_m,t_{m+1}]。\end{cases}$$

取自然数 $n_0>1$。满足 $\frac{1}{n_0}<t$,对于每一个 $n\in\{n_0,n_0+1,\cdots\}$,$x\in P$. 定义算子[2]

$$(A_nx)(t)=\begin{cases}\frac{1}{n}+\int_t^{t_{m+1}}f\left(s,(Tx)(s)+\frac{1}{n},x(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s,t\in(t_m,t_{m+1}],\\ \frac{1}{n}+\int_t^{t_m}f\left(s,(Tx)(s)+\frac{1}{n},x(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\int_{t_m}^{t_{m+1}}f\left(s,(Tx)(s)+\frac{1}{n},x(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad I_{1,m}\left((Tx)(t_m)+\frac{1}{n},x(t_m-)+\frac{1}{n}\right),\\ \quad t\in(t_{m-1},t_m],\\ \vdots\\ \frac{1}{n}+\int_t^{t_1}f\left(s,(Tx)(s)+\frac{1}{n},x(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\int_{t_1}^{t_2}f\left(s,(Tx)(s)+\frac{1}{n},x(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\cdots+\int_{t_m}^{t_{m+1}}f\left(s,(Tx)(s)+\frac{1}{n},x(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad I_{1,m}\left((Tx)(t_m)+\frac{1}{n},x(t_m-)+\frac{1}{n}\right)+\\ \quad I_{1,m-1}\left((Tx)(t_{m-1})+\frac{1}{n},x(t_{m-1}-)+\frac{1}{n}\right)+\\ \quad\cdots+I_{1,1}\left((Tx)(t_1)+\frac{1}{n}x(t_1-)+\frac{1}{n}\right),\\ \quad t\in[0,t_1)。\end{cases}$$

显然,若 $tk(t)\in L[0,t_{m+1})$,则对于每一个 $n\in\{n_0,n_0+1,\cdots]$,A_n: $P\to P$ 是全连续算子。

引理 2 若 $tk(t)\in L[0,t_{m+1})$。存在 $y_n\in P$,使得

$$(y_n)(t)=\begin{cases}\frac{1}{n}+\int_t^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s,\\ \quad t\in(t_m,t_{m+1}],\\ \frac{1}{n}+\int_t^{t_m}f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\int_{t_m}^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad I_{1,m}\left((Ty_n)(t_m)+\frac{1}{n},y_n(t_m-)+\frac{1}{n}\right),\\ \quad t\in(t_{m-1},t_m],\\ \vdots\\ \frac{1}{n}+\int_t^{t_1}f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\int_{t_1}^{t_2}f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\cdots+\\ \quad\int_{t_m}^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad I_{1,m}\left((Ty_n)(t_m)+\frac{1}{n},y_n(t_m-)+\frac{1}{n}\right)+\\ \quad I_{1,m-1}\left((Ty_n(t_{m-1})+\frac{1}{n},y_n(t_{m-1}-)+\right.\\ \quad\left.\frac{1}{n}\right)+\cdots+I_{1,1}\left((Ty_n)(t_1)+\right.\\ \quad\left.\frac{1}{n},y_n(t_1-)+\frac{1}{n}\right),t\in[0,t_1]\end{cases}\quad(3)$$

证明 令 $a_n=\int_{\frac{1}{n}}^{t_{m+1}}k(s)\mathrm{d}s,a_n\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{t_{m+1}}\frac{s}{\frac{1}{n}}k(s)\mathrm{d}s\leqslant na_n<+\infty$。由此，对于任意的 n，取足够大的 $R_n>0$，使得 $1+ma_nF\left(\frac{1}{n}\right)\sup G\left[\frac{1}{n},+\infty\right)+\gamma_{1,1}F_1\left(\frac{1}{n}\right)\sup G_1\left[\frac{1}{n},+\infty\right)+\cdots+\gamma_{1,m}F_m\left(\frac{1}{n}\right)\sup G_m\left[\frac{1}{n},+\infty\right)\leqslant R_n$。

令 $C_n=\left\{y\in P\mid\frac{1}{n}\leqslant y(t)\leqslant R_n\right.$。$y(t)$ 单调递减$\left.\right\}$。对 $y\in C_n$，易见

$$\frac{1}{n}\leqslant(A_{ny})(t)\leqslant\begin{cases}1+\int_t^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty)(s)+\frac{1}{n},y(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s,\\ \quad t\in(t_m,t_{m+1}],\\ 1+\int_t^{t_m}f\left(s,(Ty)(s)+\frac{1}{n},y(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\int_{t_m}^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty)(s)+\frac{1}{n},y(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad I_{1,m}\left((Ty_n)(t_m)+\frac{1}{n},y_n(t_m-)+\frac{1}{n}\right),\\ \quad t\in(t_{m-1},t_m],\\ \vdots\\ 1+\int_t^{t_1}f\left(s,(Ty)(s)+\frac{1}{n},y(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\cdots+\int_{t_m}^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty)(s)+\frac{1}{n},y(s)+\right.\\ \quad\left.\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+I_{1,m}\left((Ty_n)(t_m)+\frac{1}{n},y_n(t_{m-})+\right.\\ \quad\left.\frac{1}{n}\right)+\cdots+I_{1,1}\left((Ty_n)(t_1)+\frac{1}{n},\right.\\ \quad\left.y_n(t_1)+\frac{1}{n}\right),t\in[0,t_1]\leqslant 1+\\ \quad\int_t^{t_1}f\left(s,(Ty)(s)+\frac{1}{n},y(s)+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\\ \quad\cdots+\int_{t_m}^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty)(s)+\frac{1}{n},y(s)+\right.\\ \quad\left.\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s+\gamma_{1,m}F_m\left((Ty_n)(t_m)+\frac{1}{n}\right),\\ \quad G_m\left(y_n(t_m)+\frac{1}{n}\right)+\gamma_{1,m-1}F_{m-1}\left((Ty_n)\times\right.\\ \quad\left.(t_{m-1})+\frac{1}{n}\right)G_{m-1}\left(y_n(t_{m-1})+\frac{1}{n}\right)+\\ \quad\cdots+\gamma_{1,1}F_1\left((Ty_n)(t_1)+\frac{1}{n}\right)\times\\ \quad G_1\left(y_n(t_1)+\frac{1}{n}\right)\leqslant R_n。\end{cases}$$

所以 $A_nC_n\subseteq C_n$，又因为 A_n: $C_n\to C_n$ 是全连续算子，所以 A_n 在 C_n 中至少有一个不动点 y_n。

定理 设(H_1)—(H_5)成立，且 $tk(t)\in L[0,t_{m+1}]$，则方程(1)至少有一个正解。

证明 由引理2知，对每一个 n，存在 $y_n\in C_n$ 满足(3)式，下面考虑集合$\{y_n\}$。

1.1 首先证明对任意的$[a,b]\in(0,t_{m+1})$,$y_n(t)$在$[t_{k-1},t_k]$与$|a,b|$)上是等度连续的

令$w(t)=\inf\limits_{n\geq1}y_n(t)$,$W(t)=\sup\limits_{n\geq1}y_n(t)$,则一定有

$$0<w(t)\leq W(t)<+\infty,t\in J \quad (4)$$

首先证明$w(t)>0,t\in J$。

设存在$t_0>0$,使得$w(t_0)=0$,则存在$\{y_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to+\infty}y_{n_k}(t_0)=0$。$y_{n_k}(t)$的单调递减性保证了$\{y_{n_k}(t)\}$在$(t_0,t_{m+1})$上一致收敛于0。由式(2)保证,存在$\delta>0$,使得只要$0<y\leq\delta<1$,则一定有$f(t,x,y)>\dfrac{1}{b-a}$,$t\in[a,b]$,$x\in(0,t_{m+1})$。

可取自然数$K>0$,使得$0<y_{n_k}+\dfrac{1}{n_k}<\delta$,$t\in[a,b]$。由式(3)可知:

$$\delta>y_{n_k}(a)\geq\int_a^b f\left(s,(Ty_{n_k})(s)+\frac{1}{n_k},y_{n_k}(s)+\frac{1}{n_k}\right)ds>\int_a^b\frac{1}{b-a}ds=1,$$

矛盾。所以,$w(t)>0$,$t\in[0,t_{m+1}]$。

令$\eta(t)=\inf\limits_{n\geq1}\int_0^t y_n(s)ds$,易见$\eta(t)>0$,$t\in(0,t_{m+1})$,显然$w(t)$在$(0,t_{m+1})$上单减。$\eta(t)$在$(0,t_{m+1})$上单增。$y_n(t_m+)=\dfrac{1}{n}+\int_{t_{m+}}^{t_{m+1}}f\left(s,(Ty_n)(s)+\dfrac{1}{n},y_n(s)+\dfrac{1}{n}\right)ds\leq1+F((Ty_n(t_{m+1})))$。$\int_{t_{m+}}^{t_{m+1}}k(s)G(y_n(t_{m+}))ds$。

由$(Ty_n)(t_m+)=\int_0^{t_{m+}}y_n(s)ds+I_{0,1}((Ty_n)(t_1),x(t_1-))+\cdots I_{0,m-1}((Ty_n)(t_{m-1}),x(t_{m-1}-))\geq\int_0^{t_{m+}}y_n(s)ds\geq\int_0^{t_{m+}}w(s)ds$及$(H_1)$知,$F((Ty_n)\times(t_m+))$是有界的;又由条件$(H_2)$易得$y_n(t_m+)$是有界的。

由于$y_n(t_m-)=y_n(t_m+)+I_{1,m}\left((Ty_n)(t_m)+\dfrac{1}{n},y_n(t_m-)+\dfrac{1}{n}\right)\leq y_n(t_m+)+\gamma_{1,m}F_m\left((Ty_n)\times(t_m)+\dfrac{1}{n}\right)G_m\left(y_n(t_m-)+\dfrac{1}{n}\right)$。于是$y_n(t_m-)$是有界的。同理$\{y_n(t_k+)\}$,$\{y_n(t_k-)\}$是有界的,$k=1,2,\cdots,m-1$。

对于$t\in(t_m,t_{m+1})$,由

$$-\frac{y_n'(s)}{G(y_n(s))}\leq k(s)F(\eta(s)),s\in(t_m,t_{m+1}),\left(n\geq\frac{1}{t}\right)。$$

从t_m到t_{m+1}积分,我们有

$$\int_{y_n(t_m)}^{y_n(t_{m+1})}\frac{1}{G(r)}dr\leq\int_t^{t_{m+1}}k(s)dsF(\eta(t))<+\infty。$$

所以$\{y_n(t)\}$是有界的,$t\in(t_m,t_{m+1})$。同理得$t\in(t_k,t_{k+1})$时,$\{y_n(t)\}$也是有界的。$k=0,1,\cdots,m-1$。于是可得$\{y_n(t)\}$有界,$t\in J\cup\{t_1,t_2,\cdots,t_{m+1}\}$,从而,$0<w(t)\leq W(t)<+\infty$。$\forall t\in J$。

对固定的$[a,b]\subseteq(0,t_{m+1})$,根据$(H_1)$,$(H_3)$及式(4),我们有$\left(n\geq\dfrac{1}{t}\right)$。

$$0\leq-y'(t)\leq k(t)F(\eta(a))\sup G([w_b,+\infty))\in L(a,b),t\in[a,b]-\{t_k\} \quad (5)$$

这里$w_b=\inf\limits_{t\geq b}w(t)\geq0$。不等式(5) Lebesgue 积分的绝对收敛性保证了$\{y_n(t)\}$在$(t_{k-1},t_k)\cap[a,b]$,$k=1,2,\cdots,m+1$上是等度连续的。Arzela-Ascoli 定理保证存在子列,在每一个$[a,b]$上一致收敛。令$a=\dfrac{1}{3l}$,$b=t_{m+1}-\dfrac{1}{3l}$,l是自然数。当$l=1$时,存在$\{y_n(t)\}$的子列$\{y_n^{(1)}(t)\}$,其在$\left[\dfrac{1}{3},t_{m+1}-\dfrac{1}{3}\right]$上一致收敛。当$l=2$时,存在$\{y_n(t)\}$的子列$\{y_n^{(2)}(t)\}$,其在$\left[\dfrac{1}{6},t_{m+1}-\dfrac{1}{6}\right]$上一致收敛。一直进行下去,存在$\{y_n(t)\}$的子列$\{y_n^{(l+1)}(t)\}$,在$\left[\dfrac{1}{3(l+1)},t_{m+1}-\dfrac{1}{3(l+1)}\right]$上一致收敛。$l=1,2,\cdots$,则对角线序列$\{y_l^{(l)}(t)\}$在$(0,t_{m+1})-\{t_k\}$,$k=1,2,\cdots,m+1$上每一点都收敛。且容易验证$\{y_l^{(l)}(t)\}$在任意的$[a,b]\subseteq(0,t_{m+1})$上一致收敛。不失一般性,可以假设$y_n(t)$在$(0,t_{m+1})-\{t_k\}$,$k=1,2,\cdots,m+1$上每一点都收敛。在任意的$[a,b]\subseteq(0,t_{m+1})-\{t_k\}$,$k=1,2,\cdots,m+1$上一致收敛。

令$y(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(t)$,$t\in(0,t_{m+1})-\{t_k\}$,则$y(t)$在$(0,t_{m+1})-\{t_k\}$,$k=1,2,\cdots,m+1$上是连续的,单调递减的。

1.2 $y(t)$是式(1)的正解

首先,我们证明

$$\lim_{h\to 0}\sup_{n\geq 1}\int_0^h y_n(s)\mathrm{d}s = 0 \qquad (6)$$

令$h < t_1$,由式(3),有$y_n(t) - y_n\left(\frac{t_1}{2}\right)\leqslant\int_t^{\frac{t_1}{2}}f\left(s,(Ty_n)(s) + \frac{1}{n}, y_n(s) + \frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s \leqslant \int_t^{\frac{t_1}{2}}k(s) \times F\left((Ty_n)(s) + \frac{1}{n}\right)G\left(y_n(s) + \frac{1}{n}\right)\mathrm{d}s, t \in \left(0,\frac{t_1}{2}\right]$, $(n > 2)$。注意到$t \leqslant s$, $(Ty_n)(s) = \int_0^s y_n(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant \int_0^t y_n(\tau)\mathrm{d}\tau = (Ty_n)(t)$ 及 $F(x)$ 的单减性,我们有 $y_n(t) \leqslant \int_t^{\frac{t_1}{2}}k(s)\mathrm{d}sF((Ty_n)(t))\sup G\left(\left[w\left(\frac{t_1}{2}\right), +\infty\right)\right) + \sup_{n\geq 1}y_n\left(\frac{t_1}{2}\right), t \in \left(0,\frac{t_1}{2}\right]$。所以,

$$\frac{y_n(t)}{F((Ty_n)(t)) + 1} \leqslant \int_t^{\frac{t_1}{2}}k(s)\mathrm{d}s\ \sup G\left(\left[w\left(\frac{t_1}{2}\right), +\infty\right)\right) + W\left(\frac{t_1}{2}\right)\frac{1}{F((Ty_n)(t)) + 1} \qquad (7)$$

令$(Ty_n)(t) = \mu$,由式(7)可得

$$\int_0^{(Ty_n)(h)}\frac{1}{F(\mu) + 1}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^h\int_t^{\frac{t_1}{2}}k(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \times \sup G\left(\left[w\left(\frac{t_1}{2}\right), +\infty\right)\right) + W\left(\frac{t_1}{2}\right)h \qquad (8)$$

由于$\int_0^h\int_t^{\frac{t_1}{2}}k(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^h\int_0^s k(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s + \int_0^h\int_h^{\frac{t_1}{2}}k(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_0^h sk(s)\mathrm{d}s + \int_h^{\frac{t_1}{2}}hk(s)\mathrm{d}s$,又由$(H_1)$得$\left\{(Ty_n)\left(\frac{t_1}{2}\right)\right\}$是有界的。Fatou 引理可以保证

$$\int_0^{\frac{t_1}{2}}y(s)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{t_1}{2}}\lim_{n\to+\infty}y_n(s)\mathrm{d}s \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{t_1}{2}}y_n(s)\mathrm{d}s < +\infty。$$

所以,加上$y(t)$在$(0,t_1)$上的连续性及$y(t_1+0)$, $y(t_1-0)$的存在性知$y\in L[0,t_1]$。

令$C(h) = \sup_{n\geq 1}\int_0^h y_n(s)\mathrm{d}s$,则$C(h)$在$\left(0,\frac{t_1}{2}\right]$上单增的。若式(6)不成立,也就是,存在$c > 0$使得$C(0+) \geqslant c$。对于$h = \frac{1}{l}$, l是自然数。存在n_l使得$\left\{\int_0^{\frac{1}{l}}y_{nl}(s)\mathrm{d}s\right\}\geqslant \frac{c}{2}$。在式(8)中令$h = \frac{1}{i}$, $n = n_l$及$l\to+\infty$我们有$\int_0^{\frac{c}{2}}\frac{1}{F(\mu) + 1}\mathrm{d}\mu = 0$。矛盾。

由式(6)知对于任意的$\varepsilon > 0$,存在$t_1 > h > 0$使得

$$\int_0^h y_n(s)\mathrm{d}s < \frac{\varepsilon}{4}, \int_0^h y(s)\mathrm{d}s < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$n \in \{n_0, n_0 + 1, \cdots\}。$$

由于对于任意的$t\in[h,t_k]$, $\{y_n(t)\}$一致收敛于$y(t)$,存在$N>0$使得

$\left|\int_h^{t_k}(y_n(s) - y(s))\mathrm{d}s\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geqslant N$。所以

$$\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(y_n(s) - y(s))\mathrm{d}s\right| = \left|\int_{t_{k-1}}^{h}(y_n(s) - y(s))\mathrm{d}s + \int_h^{t_k}(y_n(s) - y(s))\mathrm{d}s\right| \leqslant \left|\int_{t_{k-1}}^h y_n(s)\mathrm{d}s\right| + \left|\int_{t_{k-1}}^h y(s)\mathrm{d}s\right| + \left|\int_h^{t_k}(y_n(s) - y(s))\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$\forall n \geqslant N, k = 1,2,\cdots,m+1$。

从而$\{(Ty_n(t))\}$收敛于$(Ty)(t)$, $t\in[t_k,t_{k+1}]$。显然$(Ty)(t_{k+1}) > 0$,且$I_{0,k}$和$I_{1,k}$在$(0,t_{m+1})\times(0,t_{m+1})$的连续性意味着

$$\lim_{n\to+\infty}(I_{0,k}(Ty_n)(t_k), y_n(t_k-)) + I_{1,k}((Ty_n)(t_k)), y_n(t_k-)) = I_{0,k}((Ty)(t_k), y(t_k-)) + I_{1,k}((Ty(t_k), y(t_k-))。$$

所以,对于$t \in (t_k,t_{m+1})$, $\left|(Ty_n)(t) - (Ty)(t)\right| \leqslant \left|\int_0^t(y_n(s) - y(s))\right| + \left|I_{0,k}((Ty_n)(t_k), y_n(t_k-)) - I_{0,k}((Ty)(t_k) - y(t_k-))\right| + \left|I_{1,k}((Ty_n)(t_k), y_n(t_k-)) - I_{1,k}((Ty)(t_k), y(t_k-))\right| \to 0, n\to+\infty$。

因此,$\lim_{n\to+\infty}(Ty_n)(t) = (Ty)(t), \forall t\in(0,t_{m+1}) - \{t_k\}, k = 1,2,\cdots,m+1$。

对于固定的$t\in(0,t_{m+1})$,取$\gamma > t_k$, $f(t,x,y)$的

连续性保证,$\left\{f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)\right\}$收敛于$f(s,(Ty)(s),y(s))$,$s\in[t,\gamma]$求$s\in[\gamma,t]$,由式(3),我们有$\left(n\geqslant\frac{1}{t}\right)$。

$$y_n(t)-y_n(\gamma)=\begin{cases}\int_t^\gamma f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)ds,\\ \quad t\in(t_k,t_{m+1}),\\ \int_t^\gamma f\left(s,(Ty_n)(s)+\frac{1}{n},y_n(s)+\frac{1}{n}\right)ds+\\ \quad\sum\limits_{\gamma<t_k<t}I_{1,k}\left((Ty_n)(t_k)+\frac{1}{n},y_n(t_k-)+\frac{1}{n}\right),\\ \quad t\in\left[\frac{1}{n},tk\right),k=1,2,\cdots,m。\end{cases}$$

由于$(Ty_n)(t)>\eta(t)$及式(4),令$n\to+\infty$,我们有

$$y(t)-y(\gamma)=\begin{cases}\int_t^\gamma f(s,(Ty)(s),y(s))ds,t\in(t_k,t_{m+1})\\ \int_t^\gamma f(s,(Ty)(s),y(s))ds+\sum\limits_{\gamma<t_k<t}I_{1,k}\times\\ \quad((Ty_n)(t_k),y(t_k-)),t\in(t_{k-1},t_k]\end{cases}\tag{9}$$

令在式(5)中$t=\gamma$及$n\to+\infty$。我们有

$$\int_0^{y(\gamma)}\frac{1}{G(y)}dy\leqslant\int_\gamma^\infty k(s)dsF\left(\eta\left(\frac{t_{m+1}}{2}+t_m\right)\right)\tag{10}$$

由不等式(10)可知$y(t_{m+1})=\lim\limits_{\gamma\to t_{m+1}}y(\gamma)=0$。在式(9)中令$\gamma\to t_{m+1}$。我们有

$$y(t)=\begin{cases}\int_t^{t_{m+1}}f(s,(Ty)(s),y(s))ds,t\in(t_m,t_{m+1}],\\ \int_t^{t_{m+1}}f(s,(Ty)(s),y(s))ds+\\ \quad I_{1,m}((Ty)(t_m),y(t_m-)),t\in(t_{m-1},t_m),\\ \vdots\\ \int_t^{t_{m+1}}f(s,(Ty)(s),y(s))ds+I_{1,m}((Ty)(t_m),\\ \quad y(t_m-))+\cdots+I_{1,1}((Ty)(t_1),y(t_1-)),\\ \quad t\in(0,t_1]\end{cases}$$

所以,$x(t)=(Ty)(t)$是式(1)的一个正解。

参 考 文 献

1 Guo D. Existence of positive solutions for n th-order nonlinear impulsive singular integro-differential equations in Banach spaces. Nonlinear Analysis, 2008;68:2727—2740

2 孙玉海,代丽美. 带脉冲的 Emden-Fowler 方程奇异边值问题的正解. 山东师大学报,2006;21:5—8

Existence of Positive Solution for Second-order Impulsive Singular Differential Equations

WU Juan-juan, YAN Bao-qiang

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**] The existence of positive solution for second-order impulsive singular differential equations is discussed by means of the fixed point theory of completely continuous operators.

[**Key words**] impulsive singular differential equation completely continuous operator Schauder fixed piont theory positive solution