第 9 卷　第 24 期　2009 年 12 月
1671-1819(2009)24-7288-04
科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering
Vol. 9　No. 24　Dec. 2009
© 2009　Sci. Tech. Engng.

带导数的三阶三点边值问题正解的存在性

刘　璇　闫宝强
(山东师范大学数学科学学院,济南 250014)

摘　要　应用锥上的不动点指数理论,讨论三阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} x'''(t) - a(t)f(t,x(t),x'(t)) = 0, 0 < t < 1 \\ x(0) = x'(\eta) = x''(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的正解的存在性。式(1)中,$\eta \in \left[\frac{1}{2},1\right)$是一个常数。

关键词　边值问题　　不动点指数　　正解

中图法分类号　O175.8;　　　**文献标志码**　A

1　预备知识

2005 年白占兵和费祥历[1]考虑了三阶三点边值问题

$$\begin{cases} x''' = a(t)f(t,x,x',x''), & t_1 \leqslant t \leqslant t_3; \\ x(t_1) = x'(t_2) = 0, & \eta x(t_3) + \delta x''(t_3) = 0。 \end{cases}$$

利用不动点定理,得到问题至少存在三个正解。孙永平[2]研究了类似的问题

$$\begin{cases} x''' = a(t)f(t,x,x',x''), & 0 < t < 1; \\ x(0) = \delta x(\eta), & x'(\eta) = 0, x''(1) = 0。 \end{cases}$$

利用 Leggett-Williams 不动点定理,建立了三个正解的存在性。受此启发,我们来考虑非线性项 f 依赖于一阶导数 x' 和 x 时的三阶三点边值问题(1),并给出了相对简单的条件使得式(1)存在正解。

首先给出一些引理和假设。

令 $E = C[[0,1],R]$ 是一个 Banach 空间,其范数如下定义:

$$\|x\| = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\},$$

其中,$\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ 且 $\|x\|_2 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$。

2009 年 9 月 18 日收到　　　国家自然科学基金项目(10871120)、山东省教育厅基金(J07WH08)和山东省自然科学基金(Y2008A06)资助

并令

$P = \{x \in E: x(t) \geqslant 0, x(t) \geqslant q(t)\|x\|_1$ 对任意的 $t \in [0,1]\}$。

$$q(t) = \begin{cases} \eta t, & 0 \leqslant t \leqslant \eta \\ 2\eta t - t^2, & \eta \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

显然,P 是 Banach 空间 E 中的一个锥。

我们总是假设 $g \in C(-\infty, +\infty)$是非减的函数,且 $h \in C[0, +\infty)$满足,对所有的 $c \geqslant 1$,有

$$\sup_{0 \leqslant y \leqslant c} h(y) < +\infty \tag{3}$$

$f \in C((0,1) \times [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty), (0, +\infty))$ 对所有的$(t,x,y) \in (0,1) \times [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$有

$$f(t,x,y) \leqslant h(x)g(y) \tag{4}$$

引理 1.1[3]　定义格林函数 $G(t,s)$如下:

$$G(t,s) = \begin{cases} t\min\{\eta,s\} + \frac{1}{2}s^2 - ts, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \\ t\min\{\eta,s\} - \frac{1}{2}t^2, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1。 \end{cases}$$

且具有以下性质:

(1) $J(s) = \max\limits_{t\in[0,1]} G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2, & 0 \leqslant s \leqslant \eta; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \eta \leqslant s \leqslant 1。 \end{cases}$

(2) $G(t,s) \geqslant q(t)J(s)$,其中

$$q(t)=\begin{cases}\eta t, & 0\leqslant t\leqslant\eta;\\ 2\eta t-t^2, & \eta\leqslant t\leqslant 1_{\circ}\end{cases}$$

引理 1.2[4]　令 P 是实 Banach 空间 E 中的一个锥,且设 Ω 是 E 中的有界开子集,$\theta\in\Omega$,映射 A:$P\cap\overline{\Omega}\to P$ 是全连续的。对任间的 $x\in P\cap\partial\Omega$ 和 $\mu\in(0,1]$ 有 $x\neq\mu Ax$。则

$$i(A,P\cap\Omega,P)=1_{\circ}$$

引理 1.3[3]　设 $\frac{1}{2}\leqslant\eta<1$ 是一个常数。如果 $h\in C[0,1]$ 且 $h\geqslant 0$,则问题 $x'''(t)=h(t),t\in(0,1),x(0)=x'(\eta)=x''(1)=0$ 的唯一解 x 满足

$$x(t)\geqslant q(t)\max_{t\in[0,1]}|x(t)|=\|x\|_{1}{}_{\circ}$$

此引理的结论可由引理 1.1 得到。

引理 1.4　若 $h\in C[0,1]$ 且 $h\geqslant 0$,则问题 $x'''(t)=h(t),t\in(0,1),x(0)=x'(\eta)=x''(1)=0$ 的唯一解 x 满足 $x\in P$ 且 $\|x\|_2=x'(0)$。

证明　显然,引理 1.3 知,$x(t)\geqslant q(t)\|x\|_1$。另外,因为 $x'''(t)=h(t),t\in(0,1),x(0)=x'(\eta)=x''(1)=0$,则有

$$x(t)=\int_0^t\left(t\min\{\eta,s\}+\frac{1}{2}s^2-ts\right)h(s)\mathrm{d}s+\int_t^1\left(t\min\{\eta,s\}-\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s_{\circ}$$

当 $t\leqslant\eta$ 时,

$$x(t)=\int_0^t\frac{1}{2}s^2h(s)\mathrm{d}s+\int_t^n\left(ts-\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s+\int_\eta^1\left(t\eta-\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\left(\frac{1}{2}s^2-ts+\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^n(ts-t\eta)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^1\left(t\eta-\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s,$$

当 $t>\eta$ 时,

$$x(t)=\int_0^h\frac{1}{2}s^2h(s)\mathrm{d}s+\int_\eta^t\left(t\eta+\frac{1}{2}s^2-ts\right)h(s)\mathrm{d}s+\int_t^1\left(t\eta-\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\left(\frac{1}{2}s^2-ts+\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^\eta(ts-t\eta)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^1\left(t\eta-\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s_{\circ}$$

从而,对任意的 $t\in[0,1]$,

$$x(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{2}s^2-ts+\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^\eta(ts-t\eta)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^1\left(t\eta-\frac{1}{2}t^2\right)h(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

$$x'(t)=\int_0^t(t-s)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^\eta(s-\eta)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^1(\eta-t)h(s)\mathrm{d}s \tag{6}$$

则

$$x'(0)=\int_0^\eta(s-\eta)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^1\eta h(s)\mathrm{d}s=\int_0^\eta sh(s)\mathrm{d}s+\int_\eta^1\eta h(s)\mathrm{d}s>0_{\circ}$$

$$x'(1)=\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^\eta(s-\eta)h(s)\mathrm{d}s+\int_0^1(\eta-1)h(s)\mathrm{d}s=\int_\eta^1(\eta-s)h(s)\mathrm{d}s<0,$$

$$|x'(1)|=\int_\eta^1(s-\eta)h(s)\mathrm{d}s_{\circ}$$

$$|x'(1)|-x'(0)=\int_\eta^1(s-\eta)h(s)\mathrm{d}s-\left(\int_0^\eta sh(s)\mathrm{d}s+\int_\eta^1\eta h(s)\mathrm{d}s\right)=\int_\eta^1(s-2\eta)h(s)\mathrm{d}s-\int_0^\eta sh(s)\mathrm{d}s_{\circ}$$

又因为 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,所以 $s-2\eta\leqslant 0$ 且 $|x'(1)|\leqslant x'(0)$。由条件 $x'''(t)=h(t)\geqslant 0,x''(1)=0$,我们可以得到,对任意的 $t\in[0,1]$ 有 $x''(t)\leqslant 0$。从而,对所有的 $t\in|0,1|$,$x'(t)$ 是非增的。所以,对任意的 $t\in[0,1]$ 有 $x'(1)\leqslant x'(t)\leqslant x'(0)$。从而,我们可以得到 $\|x\|_2=\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|=x'(0)$。

2　主要结果

定理 2.1　设函数 $a(t)\in C((0,1),(0,+\infty))\cap L^1[0,1]$ 满足 $\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s<+\infty$,且存在常数 $c>0$ 使得

$$c>I^{-1}\left(\sup_{0\leqslant y\leqslant c}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\right) \tag{7}$$

式(7)中,对任意的 $z\in(0,+\infty)$,令 $I(z)=\int_0^z\frac{1}{g(r)}\mathrm{d}r$。则边值问题(1)至少存在一个正解 $x(t)$,且对所有的 $t\in(0,1)$ 有 $x(t)>0$。

证明 由条件式(7),可以选择常数 $R_1>0$ 使得

$$R_1>I^{-1}\left(\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\right) \tag{8}$$

定义算子

$$(Ax)(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s,\forall t\in(0,1) \tag{9}$$

则由引理1.1(2)和条件式(4)可得,算子 A 是 $P\cap\overline{\Omega}\to P$ 的全连续算子。其中,$\Omega=\{x\in P:\|x\|<R_1\}$。首先,证明对任意的 $\mu\in(0,1]$ 和 $x\in P\cap\partial\Omega$。使得

$$x\neq\mu Ax \tag{10}$$

假设式(10)是不成立的,则至少存在一个 $\mu_0\in(0,1]$ 和 $x_0\in P\cap\partial\Omega$ 使得,$x_0=\mu_0Ax_0$。式(9)意味着 $x_0\in C^2[0,1]$ 且有

$$\begin{cases}x_0'''(t)=\mu_0a(t)f(t,x_0(t),x_0'(t)),t\in(0,1);\\ x_0(0)=x_0'(\eta)=x_0''(1)=0。\end{cases}$$

$$x_0'''(t)=\mu_0a(t)f(t,x_0(t),x_0'(t))\leqslant a(t)f(t,x_0(t),x_0'(t))\leqslant a(t)h(x_0(t))g(x_0'(t)),\quad t\in[0,1] \tag{11}$$

从 t 到1对式(11)积分可得

$$-x_0''(t)\leqslant\int_t^1 a(s)h(x_0(s))g(x_0'(s))\mathrm{d}s\leqslant g(x_0'(t))\int_t^1 a(s)h(x(s))\mathrm{d}s \tag{12}$$

$$\frac{-x''_0(t)}{g(x_0'(t))}\leqslant\int_t^1 a(s)h(x_0(s))\mathrm{d}s,t\in[0,1] \tag{13}$$

当 $t\in[0,\eta]$ 时,对式(13)从 t 到 η 积分,可以得到

$$-\int_t^\eta\frac{x_0''(s)}{g(x_0')(s)}\mathrm{d}s\leqslant\int_t^\eta\int_r^1 a(s)h(x_0(s))\mathrm{d}s\leqslant\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s,t\in[0,\eta]。$$

$$\int_0^{x_0'(t)}\frac{1}{g(r)}\mathrm{d}r\leqslant\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,\eta]。$$

$$I(x_0'(t))\leqslant\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s,t\in[0,\eta]。$$

$$x_0'(t)\leqslant I^{-1}\left(\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\right),t\in[0,\eta] \tag{14}$$

也就是说

$$x'_0(0)\leqslant I^{-1}\left(\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\right)。$$

由引理1.4可得,

$$\|x_0\|_2\leqslant I^{-1}\left(\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\right) \tag{15}$$

从0到 η 对式(15)积分,我们可以得到

$$\|x_0\|_1=x_0(\eta)\leqslant\eta I^{-1}\left(\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\right)。$$

由于 $\|x\|=\max\{\|x\|_1,\|x\|_2\}$,则

$$R_1=\|x_0\|\leqslant I^{-1}\left(\sup_{0\leqslant y\leqslant R_1}h(y)(1+\eta)\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\right)。$$

显然,这与式(8)是矛盾的。因此,式(10)是成立的。从而,由引理1.2得,$i(A,P\cap\Omega,P)=1$,也就是说,存在 $x\in P\cap\Omega$ 满足 $x=Ax$,从而有

$$\begin{cases}x'''(t)=a(t)f(t,x(t),x'(t)),t\in(0,1);\\ x(0)=x'(\eta)=x''(1)=0。\end{cases}$$

这也意味着 $x(t)$ 是边值问题(1)的一个正解。定理得证。

参 考 文 献

1 Bai Z, Fei X, Existence of triple positive solutions for a third order generalized right focal problem. Math Inequal Appl, 2006; 9(3): 437—444

2 Sun Y. Existence of triple positive solutions for a third-order three-point boundary value problem. J Comput Appl Math, 2008; 221: 194—201

3 Yu H, Multiple positive solutions to third-order three-point singular semipositone boundary value problem. Proc Indian Acad Sci (Math Sci), 2004; 114(4): 409—422

4 Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones. New York: Academic Press, 1988

Positive Solution for Third-order Three-point Boundary Value Problems with Derivative Dependence x'

LIU Xuan, YAN Bao-qiang

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**] Using the theory of fixed point index, the existence of solutions for the third-order boundary value problems

$$\begin{cases} x'''(t) - a(t)f(t, x(t), x'(t)) = 0, 0 < t < 1, \\ x(0) = x'(\eta) = x''(1) = 0, \end{cases}$$

are presented, where η is constant.

[**Key words**] boundary value problems fixed-piont index positive solution

(上接 7287 页)

5 Maleknejad K, Kajani M T. Solving linear integro-differential equation system by Galerkin methods with hybrid functions. Applied Mathematics and Computation, 2004; 159: 603—612

6 Maleknejad K, Kajani M T, Mahmoudi Y. Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equations of the second kind by using Legendre wavelets. Kybernetes, 2003; 32(9/10): 1530—1539

7 Razzaghi M, Yousefi S. The Legendre wavelets operational Matrix of integration. International Journal of Systems Science, 2001; 32: 500—502

Legendre Wavelets Method for Solving System of Linear Fredholm Integro-differential Equations

ZHANG Jian-ping[1,2], HAN Hui-li[1], PAN Xue-feng[1,3]

(College of Mathematics and Computer Science, Ningxia University[1], Yinchuan 750021, P. R. China;

Department of Mathematics, Yulin College[2], Yulin 719000, P. R. China;

Department of Mathematics, Shihezi University[3], Shihezi 832003, P. R. China)

[**Abstract**] The properties of Legendre wavelets are introduced and are utilized to reduce system of linear Fredholm integro-differential equations to a set of algebraic equations, which making the matrix sparse. In the end, some numerical examples are used to verify effciency of the method compare to other methods.

[**Key words**] integro-differential equations legendre wavelets operational matrix product operation