

关于 α 次星形映照的一个注记

洪 浩

(陕西理工学院数学系,汉中 723001)

摘要 主要利用单复变函数中单位圆盘的 α 次星形函数来构造多复变量空间在有界星形圆型域及复 Banach 空间的单位球上的 α 次星形映射。

关键词 α 次星形映照 α 次星形函数 有界星形圆型域

中图法分类号 O174.51; **文献标志码** A

对于单个复变量的全纯函数及其子族的具体例子人们很容易找到,但对于多个复变量的空间中双全纯星形或凸映射及其子族却不易找到具体的例子。本文主要讨论了如何利用单位圆盘的 α 次星形函数来构造有界星形圆型域及复 Banach 空间的单位球上的 α 次星形映射。

用 C 表示复平面, $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ 表示复平面 C 中的单位圆盘。 X 表示复 Banach 空间, B 表示复 Banach 空间的单位球。 X^* 是 X 的对偶空间, $x \in X \setminus \{0\}$, 我们定义

$T(x) = \{T_x \in X^* : \|T_x\| = 1, T_x(x) = \|x\|\}$ 。在文献[1-3]中在 D 和有界星形圆型域及 B 上分别引入 α 次星形函数和 α 次星形映射并给出了解析刻画。

定义 1 设 $0 < \alpha < 1$, 若 $f'(0) = 1, f(0) = 0$, 且满足 $\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)z}{f(z)} \right] > \alpha, z \in D$, 则称 f 是 D 上的 α 次星形函数。记 $S_\alpha^*(D)$ 表示 D 上的 α 次星形函数全体。

定义 2 设 Ω 是 C^n 中有界星形圆型域, 其 Minkowski 泛函 $\rho(z)$ 除去一个低维流形外是一阶连续可微的, $f: \Omega \rightarrow C^n$ 是一个正规化双全纯映射, 且 $0 < \alpha < 1$, 若

$$\left| \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} J_f^{-1}(z) f(z) - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, z \in \Omega \setminus \{0\},$$

则称 f 是 Ω 上的 α 次星形映射。

定义 3 设 $f: B \rightarrow X$ 是一个正规化双全纯映射, 且 $0 < \alpha < 1$, 若

$$\left| \frac{1}{\|x\|} T_x [J_f^{-1}(x) f(x)] - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, x \in B \setminus \{0\},$$

则称 f 是 B 上的 α 次星形映射。

1 主要结果及其证明

定理 1 设 $F(z) = \frac{rf\left(\frac{z_1}{r}\right)}{z_1} z$, 其中 $f \in S(D)$, r 是

C 中圆心在原点的圆盘 $U = \{z_1 \in C : z = (z_1, \dots, z_n)' \in \Omega\}$ 的半径。则 $F \in S_\alpha^*(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$) 的充要条件是 $f \in S_\alpha^*(D)$ 。

证明 记 $g(z_1) = \frac{rf\left(\frac{z_1}{r}\right)}{z_1}$, 则 $F(z) = g(z_1)z$, 故

$$DF(z)\eta = (Dg(z_1)\eta)z + g(z_1)\eta, \eta \in C^n.$$

又因 $f \in S(D)$, 于是 $\frac{f'\left(\frac{z_1}{r}\right)z_1}{f\left(\frac{z_1}{r}\right)r} \neq 0, z_1 \in U$, 直接计算可得

$$\frac{Dg(z_1)}{g(z_1)} z_1 = \frac{f'\left(\frac{z_1}{r}\right) \frac{z_1}{r}}{f\left(\frac{z_1}{r}\right)} - 1, \text{就有 } \frac{Dg(z_1)}{g(z_1)} z_1 + 1 \neq 0.$$

不难计算

$$(DF(z))^{-1}\eta = \frac{1}{g(z_1)}\left(\eta - \frac{(Dg(z_1)\eta)z_1}{g(z_1) + Dg(z_1)z_1}\right),$$

$\eta \in \mathbb{C}^n$ 。

故 $F(z)$ 是 Ω 上的一个正规化局部双纯映射,且

$$J_F^{-1}(z)F(z) = \frac{f\left(\frac{z_1}{r}\right)}{f'\left(\frac{z_1}{r}\right)\frac{z_1}{r}}z \quad (1)$$

充分性的证明

因 $f \in S_\alpha^*(D)$, 注意到 $\frac{2\partial\rho(z)}{\partial z}z = \rho(z)^{[4]}$, 故由

(1) 可得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial\rho(z)}{\partial z} J_F^{-1}(z)F(z) - \frac{1}{2\alpha} \right| = \\ & \left| \frac{f\left(\frac{z_1}{r}\right)}{f'\left(\frac{z_1}{r}\right)\frac{z_1}{r}} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, z \in \Omega \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

即 $F \in S_\alpha^*(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$)。

必要性证明

在(1)式中令 z 是 Ω 中的第一分量为 $r\lambda$ ($\lambda \in D \setminus \{0\}$) 的点, 因 $F \in S_\alpha^*(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$), 故有 $\left| \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)\lambda} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}$, 即有 $\operatorname{Re}\left[\frac{f'(\lambda)\lambda}{f(\lambda)}\right] > \alpha$ 。因此,

$f \in S_\alpha^*(D)$ 。

定理 2 设 $F(z) = \frac{f(T_u(x))}{T_u(x)}x$, $u \in B$, 其中 $f \in S(D)$, 则 $F \in S_\alpha^*(B)$ ($0 < \alpha < 1$) 的充要条件是 $f \in S_\alpha^*(D)$ 。

证明 记 $g(x) = \frac{f(T_u(x))}{T_u(x)}$, 则 $F(x) = g(x)x$,

故 $DF(x)\eta = (Dg(x)\eta)x + g(x)\eta$, $\eta \in X$ 。

又因 $f \in S(D)$, 于是 $\frac{f'(T_u(x))T_u(x)}{f(T_u(x))} \neq 0$, $x \in B$,

直接计算可得 $\frac{Dg(x)}{g(x)}x = \frac{f'(T_u(x))T_u(x)}{f(T_u(x))} - 1$, 就有

$\frac{Dg(x)}{g(x)}x + 1 \neq 0$ 。不难计算

$$(DF(x))^{-1}\eta = \frac{1}{g(x)}\left(\eta - \frac{(Dg(x)\eta)x}{g(x) + Dg(x)x}\right), \eta \in X.$$

故 $F(x)$ 是 B 上的一个正规化局部双纯映射,且

$$J_F^{-1}(x)F(x) = \frac{f(T_u(x))}{f'(T_u(x))T_u(x)}x \quad (2)$$

充分性的证明

因 $f \in S_\alpha^*(D)$, 故由式(1)可得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\|x\|} T_x [J_F^{-1}(x)F(x)] - \frac{1}{2\alpha} \right| = \\ & \left| \frac{f(T_u(x))}{f'(T_u(x))T_u(x)} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, x \in \Omega \setminus \{0\} \end{aligned}$$

即 $F \in S_\alpha^*(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$)。

必要性证明

在式(2)中令 $x = \lambda u$, $\lambda \in D \setminus \{0\}$, 因 $F \in S_\alpha^*(\Omega)$ ($0 < \alpha < 1$), 故有

$$\left| \frac{f(T_u(x))}{f'(T_u(x))T_u(x)} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha},$$

即有 $\operatorname{Re}\left[\frac{f'(\lambda)\lambda}{f(\lambda)}\right] > \alpha$ 。因此, $f \in S_\alpha^*(D)$ 。

除了本文讨论的利用单位圆盘的 α 次星形函数来构造有界星形圆型域及复 Banach 空间的单位球上的 α 次星形映射, 还可以利用推广的 Roper-Suffridge 算子来构造, 可以参考文献[5]。

参 考 文 献

- Robertson M S. On the theory of univalent functions. Ann Math, 1936; 37:374—408
- 刘浩, 卢克平. 多复变数星形映射的两类子族. 数学年刊, 2000; 21:533—546
- Hamada T, Kohr G, Liczberski P. starlike mappings of order α on the unit ball in complex Banach spaces. Glas Mat Ser, 2001; 36:39—48
- Liu T S, Ren G B. Growth theorem of convex mapping on bounded convex circular domains. Science in China, 1998; 41:123—130
- 刘小松. 多复变数几何函数论中某些双全纯映照子族的性质. 合肥: 中国科学技术大学, 2006

The Note about Starlike Mappings of Order α

HONG Jie

(Department of Mathematics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, P. R. China)

[Abstract] The starlike mappings of order α is constructed on bounded starlike circular domain and the ball of complex Banach spaces. It is used by the starlike functions of order α on the unit disk D.

[Key words] starlike mappings of order α starlike functions of order α bounded starlike circular domain

(上接第页 7442)

- 82 杨晓光,曾松,杭明升.中国城市道路交通实时自适应控制与管理系统研究.交通运输工程学报,2001;1(2):74—77
 83 高丽颖.基于 Agent 的城市交通信号控制方法研究.北京:北京

- 工业大学,2008;14
 84 徐今强.城市交通控制的研究现状与展望.交通与运输,2005;(7):27—29

Status and Development of the Urban Traffic Signal Control System

LI Qun-zu^{1,2}, XIA Qing-guo¹, BA Ming-chun¹, PAN Wang-peng¹

(School of Computer, Northwestern Polytechnical University¹, Xi'an 710129, P. R. China; Unit 93926 of PLA², Hetian 848000, P. R. China)

[Abstract] Urban traffic signal control system controls the economic lifeline of cities, and its efficiency level directly affects the socio-economic development state, so it has received much concern from the whole society. Firstly, this paper briefly reviews the development course of the urban traffic signal control system, analyzes and discusses the control model and optimization algorithms and other aspects of the foreign typical traffic signal control systems such as TRANSYT, SCOOT, SCATS, and so on, and points out their features and weaknesses. Secondly, analyzing three domestic representative traffic signal control systems such as NUTCS, HiCon, and SMOOTH, this paper summarizes the domestic research achievements and current status in this field. Finally, it puts forward the development outlook and some constructive suggestion to the traffic signal control system in public transport priority, mixed traffic, standardization and modularization, intelligent control and system integration.

[Key words] traffic signal control real-time adaptive status development