第10卷 第1期 2010年1月 1671—1815(2010)1-0017-04
科 学 技 术 与 工 程 Science Technology and Engineering
Vol. 10 No. 1 Jan. 2010

求解第一类 Fredholm 积分方程的小波-正则化方法及外推

张建平[1,2] 韩惠丽[1*] 潘学锋[1,3]

(宁夏大学数学计算机学院[1],银川 750021;榆林学院数学系[2],榆林 719000;石河子大学数学系[1],石河子 832003)

摘 要 利用 Legendre 小波 Galerkin 方法将积分方程转化为线性方程组,对 $n+1$ 个不同的正则化子分别利用 Tikhonov 正则化方法求解,得到了 $n+1$ 组不同的稳定解。然后应用 Newton 插值公式求得了正则化子为零时积分方程的最佳稳定解。数值算例表明,方法是非常有效的。

关键词 第一类 Fredholm 积分方程 Legendre 小波 Tikhonov 正则化方法 Newton 插值

中图法分类号 O241.83; **文献标志码** A

在实际问题中,有大量的数学物理反问题都可转化为第一类 Fredholm 积分方程的求解问题,即

$$\int_0^1 k(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(x),x\in[0,1] \tag{1}$$

式(1)中核函数 $k(x,t)$ 和右端函数 $g(x)$ 给定,$f(x)$ 是未知函数。

然而,方程(1)的求解往往是不适定的,即解的存在性、唯一性与稳定性三者之中至少有一个不能满足。这里主要指不稳定性。求解此类不适定问题的普遍方法是正则化方法[1—4]。但这些方法都需要一个人为的正则化子 $\alpha>0$,它的选择明显影响到最终解的误差水平或求解的稳定性。当 α 充分大时,求解越稳定但精确性越差;当 α 充分小时,求解越趋于精确但稳定性越差;特别是当 $\alpha=0$ 时求解是最精确的,但这时也是最不稳定的。受文献[4]的启发,本文凭经验选择 $n+1$ 个不同的正则化子,分别利用 Tikhonov 正则化方法求解,得到积分方程的 $n+1$ 组不同稳定解,然后外推插值,求得 $\alpha=0$ 时的解就是利用 Tikhonov 正则化方法求解第一类积分方程的最佳稳定解。由于用小波函数作基底将积分方程离散化所得到的方程组的系数矩阵是稀疏的,这是很利于做数值计算的。所以采用 Legendre 小波为基函数利用 Galerkin 方法离散积分方程。最后给出的数值算例表明了方法的可行性和有效性。

2009年9月7日收到 国家自然科学基金(10661009)、教育部科学技术重点项目(207124)、宁夏自然科学基金(NZ0722)资助

第一作者简介:张建平(1982—),男,陕西榆林人,研究生,研究方向:复分析理论及应用。

*通信作者简介:韩惠丽(1972—),女,副教授,博士,E-mail:han-hl@nxu.edu.cn。

1 Legendre 小波及性质

区间[0,1)上的 Legendre 小波定义为

$$\psi_{n,m}(t)=\begin{cases}\sqrt{m+\dfrac{1}{2}}\,2^{\frac{k}{2}}L_m(2^k t-\hat{n}), & \dfrac{\hat{n}-1}{2^k}\leqslant t<\dfrac{\hat{n}+1}{2^k}\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{2}$$

式(2)中 $k=1,2,\cdots$;$\hat{n}=2n-1$;$n=1,2,\cdots,2^{k-1}$;$m=0,1,\cdots,M-1$;$L_m(t)$ 为 m 阶 Legendre 多项式定义为

$$L_0(t)=1,$$
$$L_1(t)=t,$$
$$L_{m+1}(t)=\frac{2m+1}{m+1}tL_m(t)-\frac{m}{m+1}L_{m-1}(t),$$
$$m=1,2,\cdots,。$$

则函数族$\{\psi_{n,m}(t)\}$构成了 $L^2[0,1]$上的一组标准

正交基[5]。

定义在区间$[0,1)$上的函数$f(t)$能够用 Legendre 小波展开为

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{n,m}\psi_{n,m}(t) \tag{3}$$

式(3)中

$$c_{n,m}=\langle f(t),\psi_{n,m}(t)\rangle \tag{4}$$

式(4)中,$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示内积,将式(3)中无穷级数截断,得

$$f(t)\backsimeq\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}c_{n,m}\psi_{n,m}(t)=C^{\mathrm{T}}\Psi(t) \tag{5}$$

式(5)中 C 和 $\Psi(t)$分别是 $2^{k-1}M\times1$ 维的系数向量和基向量函数,表达式为

$$C=[c_{1,0},c_{1,1},\cdots,c_{1,M-1},c_{2,0},\cdots,c_{2,M-1},c_{2^{k-1},0},\cdots,c_{2^{k-1},M-1}]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$\Psi(t)=[\psi_{1,0}(t),\psi_{1,1}(t),\cdots,\psi_{1,M-1}(t),\psi_{2,0}(t),\cdots,\psi_{2,M-1}(t),\cdots,\psi_{2^{k-1},0}(t),\cdots,\psi_{2^{k-1},M-1}(t)]^{\mathrm{T}}。 \tag{7}$$

2 积分方程的小波 Galerkin 方法

为一般性,在 $L^2[0,1]$上考虑方程(1),即假设核函数 $k(x,t)\in L^2([0,1]\times[0,1])$,$g(x)\in L^2[0,1]$。或将方程(1)写成算子的形式

$$\mathscr{K}f=g \tag{8}$$

式(8)中积分算子

$$\mathscr{K}:L^2[0,1]\to L^2[0,1],\mathscr{K}(f(t))=\int_0^1 k(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

是一个自共轭的线性紧算子。

记 $X_n=\mathrm{span}\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{d_n}\}\subset L^2[0,1]$,其中$\{\phi_i\}_{i=1}^{d_n}$是 Legendre 小波基。

则对于任意的函数$f_n(x)\in X_n$,有

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{d_n}c_j\phi_j(t) \tag{9}$$

将式(9)代入式(1)或式(8),得

$$r_n(x)=\sum_{j=1}^{d_n}c_j\int_0^1 k(x,t)\phi_j(t)\mathrm{d}t-g(x)=\sum_{j=1}^{d_n}c_j\mathscr{K}\phi_j(t)-g(x) \tag{10}$$

式(10)中 $r_n(x)$为误差函数,为了求得未知系数 $c_j(j=1,2,\cdots,d_n)$,假设

$$\langle r_n(x),\phi_i(x)\rangle=0,i=1,2,\cdots,d_n \tag{11}$$

由式(10)和式(11),得方程组

$$\sum_{j=1}^{d_n}c_j\langle\mathscr{K}\phi_j,\phi_i\rangle=\langle g,\phi_i\rangle,i=1,2,\cdots,d_n \tag{12}$$

或写成矩阵形式

$$AX=b \tag{13}$$

式(13)中

$$A_{ij}=\int_0^1\int_0^1 k(x,t)\phi_j(t)\phi_i(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

$$b_i=\int_0^1 g(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x。$$

3 Tikhonov 正则化与 Newton 插值

一般地,由离散方法得到的线性方程组(13)是病态的,为稳定求解,利用 Tikhonov 正则化的思想,构造展平泛函求极小值,可得等价的 Euler 方程

$$(A^{\mathrm{T}}A+\alpha I)X=A^{\mathrm{T}}b \tag{14}$$

式(14)中 $\alpha>0$ 称为正则化子,I 为单位矩阵,称为稳定矩阵。

适当选择 $0<\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n<1$,分别代入方程(14)中求解,然后由式(9)可得到方程(1)的 $n+1$ 组不同稳定解,则对任意 $\alpha\in[0,1)$,可以应用 Newton 插值公式。

定义

$$f[\alpha_i,\alpha_j]=\frac{f(\alpha_i)-f(\alpha_j)}{\alpha_i-\alpha_j},i\neq j,i,j=0,1,\cdots,n。$$

为函数$f(\alpha)$在 α_i 及 α_j 两点处的一阶差商。

一般地,可以定义 k 阶差商

$$f[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k]=\frac{f[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}]-f[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k]}{\alpha_0-\alpha_k},$$

$k=2,3,\cdots,n$。

有 Newton 插值公式

$$f(\alpha)=f(\alpha_0)+f[\alpha_0,\alpha_1](\alpha-\alpha_0)+f[\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2]\times(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1)+\cdots+f[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n]\times(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1)\cdots(\alpha-\alpha_{n-1})+R_n(\alpha)。$$

式中$f(\alpha_k)$为对应于 $\alpha=\alpha_k(k=0,1,\cdots,n)$时积分方

程(1)的稳定解，插值余项

$R_n(\alpha)=f[\alpha,\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n](\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1)\cdots(\alpha-\alpha_n)$。

根据文献[6]中定理 1.2，可得

$f[\alpha,\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n]=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$。因此

$$R_n(\alpha)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_1)\cdots(\alpha-\alpha_n)。$$

所以，当 $\alpha=0$ 时，有

$$f_n(0)=f(\alpha_0)-f[\alpha_0,\alpha_1]\alpha_0+f[\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2]\alpha_0\alpha_1+\cdots+(-1)^{n-1}f[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n]\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1} \tag{15}$$

截断误差为

$$R_n(0)=(-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n\to 0(n\to+\infty) \tag{16}$$

这样，式(15)就是积分方程(1)的最佳稳定解。

4　数值算例

为了检验方法的有效性，给出了两个数值算例计算结果。以下例子中均选择小波参数 $k=M=3$。正则化子 $\alpha_0=10^{-5}$，$\alpha_1=10^{-4}$，$\alpha_2=10^{-3}$。

例 1　考虑积分方程

$$\int_0^1\sin(xt)y(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2},x\in[0,1]。$$

方程的精确解为 $y(x)=x$。表 1 给出了方程精确解和数值解的结果比较。

表 1　精确解和数值解的比较

x_i	精确解	数值解 $\times10^{-3}$	绝对误差/10^{-3}
0.0	0.000 00	0.027 715	0.027 715
0.1	0.100 00	0.102 08	2.08
0.2	0.200 00	0.203 92	3.92
0.3	0.300 00	0.305 37	5.37
0.4	0.400 00	0.406 14	6.14
0.5	0.500 00	0.506 06	6.06
0.6	0.600 00	0.604 97	4.97
0.7	0.700 00	0.702 55	2.55
0.8	0.800 00	0.798 68	1.32
0.9	0.900 00	0.893 06	6.94

例 2　考虑积分方程

$$\int_0^1 e^{xt}y(t)\,\mathrm{d}t=\frac{e^{x+1}-1}{x+1},x\in[0,1]。$$

方程的精确解为 $y(x)=e^x$。表 2 给出了方程精确解和数值解的结果比较。

表 2　精确解和数值解的比较

x_i	精确解	数值解 $\times10^{-3}$	绝对误差/10^{-3}
0.0	1.000 00	0.993 82	6.18
0.1	1.105 17	1.101 44	3.73
0.2	1.22 140	1.220 17	1.23
0.3	1.349 86	1.350 59	0.730
0.4	1.491 82	1.494 28	2.46
0.5	1.648 72	1.652 35	3.63
0.6	1.822 12	1.825 69	3.57
0.7	2.013 75	2.016 68	2.93
0.8	2.225 54	2.226 27	0.730
0.9	2.459 60	2.456 95	2.65

5　结论

本文利用 Legendre 小波-Tikhonov 正则化方法求解了第一类 Fredholm 积分方程，通过外推 Newton 插值求得了正则化子为零时方程的最佳稳定解。从数值算例结果来看，求得的数值解的精确度是比较高的，所以我们提出的方法是可行和有效的。

参　考　文　献

1　Maleknejad K, Sohrabi S. Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets. Appl Math Comput, 2007; 186: 836—843

2　Li Gongsheng, Liu Yan. A new regularizing algorithm for solving the first kind of Fredholm integral equations. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2005; 25(2): 204—210

3　黄小为，吴传生，李卓球. TSVD 正则化方法的参数选取及数值计算. 华中师范大学学报，2006; 40(2): 154—157

4　王德明. 稳定求解第一类 Fredholm 积分方程的一个方法. 同济大学学报(自然科学版)，2006; 34(10): 1414—1416

5　Maleknejad K, Kajani M T, Mahmoudi Y. Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equations of the second kind by using Legendre wavelets. Kybernetes, 2003; 32(9/10): 1530—1539

6　黄明游，冯果忱. 数值分析(下册). 北京：高等教育出版社. 2008

Wavelet-regularization Method and Extrapolation for Solving Fredholm Integral Equations of the First Kind

ZHANG Jian-ping[1,2], HAN Hui-li[1*], PAN Xue-feng[1,3]

(Department of Mathematics and Computer Science, Ningxia University[1], Yinchuan 750021, P. R. China;

Department of Mathematics, Yulin College[2], Yulin 719000, P. R. China;

Department of Mathematics, Shihezi University[3], Shihezi 832003, P. R. China)

[**Abstract**] Legendre wavelets are utilized as a basis in Galerkin method to reduce the integral equations to a system of linear equations, and the Tikhonov regularization method is applied respectively on solving the system with $n+1$ different reqlariging filter. Then the best stability solution of the integral equation is obtained by using Newton interpolation formula when the regularization filter equals to zero. Numerical examples show that our approach is very effective.

[**Key words**] first kind of Fredholm integral equation Legendre wavelets Tikhonov regularization method Newton interpolation

勘 误 表

年	卷	期	页	栏	行	误	正
2009	9	23	7166	通	2	……李万意	……李万宝
2009	9	23	7133	通	8	……联系(脉冲自由,无脉冲和无脉冲膜它们的意思不一样,不能替换)。	……联系。
2009	9	23	7133	左	倒1—2	……,首都师范大学硕士。	……,山东英才学院硕士。
2009	9	23	7134	左	19—20	(改动 L 为下面的矩阵,后边是下标 ij 的取值范围)	——
2009	9	22	6619	左	倒3	……,山东即默人,……	……,山东即墨人,……
2009	9	22	6687	左	倒1	……。E-mail:eetshlin@ scuh. edu. cn。	……。E-mail:eetshlin@ scut. edu. cn。