第 9 卷　第 23 期　2009 年 12 月
1671-1819(2009)23-6956-04
科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering
Vol. 9　No. 23　Dec. 2009

α-严格对角占优矩阵与 SOR 迭代法的收敛性定理

田秋菊　宋岱才*　郭小明

(辽宁石油化工大学理学院,抚顺 113001)

摘　要　针对线性方程组的系数矩阵为 α-严格对角占优矩阵和双 α-链严格对角占优矩阵的情况,讨论了线性方程组求解时常用到的 SOR 迭代方法的收敛性,给出了迭代法收敛性定理,解决了以往估计迭代矩阵谱半径的问题。结果不仅适用于这两类矩阵,还适用于广义 α-严格对角占优矩阵类。最后举例说明了所给结果的优越性。

关键词　α-严格对角占优矩阵　　双 α-链严格对角占优矩阵　　迭代法　　收敛性

中图法分类号　O241.6　　O151.2;　　　**文献标志码**　A

1　基本概念及引理

给定线性方程组 $Ax=b$,其中 $A\in C^{n\times n}$ 为非奇异矩阵,b 为 n 维列向量。在用迭代法解此方程组的问题中,常常需要研究其迭代矩阵谱半径的界限,这对于研究迭代法的收敛性以及收敛速度等是非常有意义的。文献[1—7]对于迭代矩阵为严格对角占优矩阵、α-严格对角占优矩阵和双 α-链严格对角占优矩阵等情形分别讨论了常用的几种迭代法的谱半径的上界估计问题。然而很少见有针对系数矩阵来研究迭代法收敛的问题。本文的主要工作是:针对方程组的系数矩阵 A 为 α-严格对角占优矩阵以及双 α-链严格对角占优矩阵,讨论了常用的 SOR 迭代法的收敛性,得到了几个从未见过的结论,解决了估计迭代矩阵谱半径的界限问题。最后举例说明了所给结果的优越性。

设方程组的系数矩阵 A 分解为 $A=D-L-U$,其中 $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,$-L$ 是矩阵 A 的严格下三角矩阵,$-U$ 是矩阵 A 的严格上三角矩阵。

2009 年 9 月 4 日收到　　辽宁省教育厅高校科研项目(2004F100)、国家自然科学基金项目(20273028)资助

第一作者简介:田秋菊(1978—),女,辽宁沈阳市,讲师,研究方向:数值代数。E-mial:sdc1@163.com。

*通信作者简介:宋岱才。

SOR 迭代法的公式为:

$$x^{(k+1)}=L_\omega x^{(k)}+f;k=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

式(1)中 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ 称为 SOR 迭代法的迭代矩阵,$f=(D-\omega L)^{-1}b$,ω 称为松弛因子。我们知道,SOR 迭代法收敛的必要条件为 $0<\omega<2$,且当 $\omega=1$ 时,SOR 迭代法即为 Gauss-Seidel 迭代法。关于 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性我们已经做过详细的讨论[8,9],在此我们讨论一般情况下 SOR 迭代法的收敛性。

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,记 $R_i(A)=\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|$;$S_i(A)=\sum\limits_{i\neq j}|a_{ji}|$,$i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$。

定义 1[8]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若对任意的 $i\in N$,$\alpha\in[0,1]$,皆有 $|a_{ii}|>\alpha R_i(A)+(1-\alpha)S_i(A)$,则称 A 为严格 α-对角占优矩阵,记为 $A\in C_\alpha$。若存在正对角矩阵 $d=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 使得 $Ad\in C_\alpha$,则称 A 为广义严格 α-对角占优矩阵,记为 $A\in GC_\alpha$。特别地,当 $\alpha=1$ 时,称矩阵 A 为严格对角占优矩阵。

定义 2[8]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若 $|a_{ii}a_{jj}|>R_i^\alpha(A)S_i^{1-\alpha}(A)R_j^\alpha(A)S_j^{1-\alpha}(A)$,$\forall i,j\in N$ 且 $i\neq j$ 成立,则称 A 为双 α-链严格对角占优矩阵,记为 $A\in DD_\alpha$。若存在正对角矩阵 $d=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,使得 $Ad\in DD_\alpha$,则称 A 为广义双 α-链严格对角占优矩阵,记为 $A\in GDD_\alpha$。特别地,当 $\alpha=1$ 时,称矩阵 A

为双严格对角占优矩阵。

引理 1[8]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若 $A\in C_\alpha$ 或 $A\in GC_\alpha$,则 A 为非奇异矩阵。

引理 2[8]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若 $A\in DD_\alpha$ 或 $A\in GDD_\alpha$,则 A 为非奇异矩阵。

引理 3　设 λ 是一个常数,$0<\omega\leqslant 1$,则当 $|\lambda|\geqslant 1$ 时,总有 $|\lambda-1+\omega|\geqslant|\lambda|\omega\geqslant\omega$。

证明　首先证明不等式的左端成立。当 $\lambda=1$ 时,不等式显然成立。

当 $\lambda>1$ 时,有 $\lambda-1>0$,又因为 $0<\omega\leqslant 1$,所以有 $\lambda-1\geqslant\omega(\lambda-1)$,即得到 $\lambda-1+\omega\geqslant\lambda\omega$,即得到 $|\lambda-1+\omega|\geqslant|\lambda\omega|$。

当 $\lambda\leqslant -1$ 时,有 $1-\lambda>0$,同理由 $0<\omega\leqslant 1$ 得,$1-\lambda\geqslant\omega(1-\lambda)$,即 $1-\lambda-\omega\geqslant-\lambda\omega$,又由于 $1-\lambda-\omega>0$ 和 $-\lambda\omega>0$,所以 $|1-\lambda-\omega|\geqslant|-\lambda\omega|$,即 $|\lambda-1+\omega|\geqslant|\lambda\omega|$。

其次,由于 $|\lambda|\geqslant 1$ 及 $0<\omega\leqslant 1$,所以有不等式的右端自然成立。

2　主要结论

定理 1　若 $A\in C_\alpha$ 或 $A\in DD_\alpha$,则当松弛因子 ω 满足 $0<\omega\leqslant 1$ 时,对任意初始向量解线性方程组 $Ax=b$ 的 SOR 迭代法都收敛。

证明　首先证明当 $A\in C_\alpha$ 时,SOR 迭代法收敛。

由条件知,对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})\neq O$。设 λ 为 SOR 迭代法的迭代矩阵 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ 的任意特征值,则 $\det(\lambda I-L_\omega)=\det\{\lambda I-(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]\}=0$,($I$ 为单位矩阵),即

$\det(D-\omega L)^{-1}\{\lambda(D-\omega L)-[(1-\omega)D+\omega U]\}=0$,从而得,

$\det(D-\omega L)^{-1}\det\{\lambda(D-\omega L)-[(1-\omega)D+\omega U]\}=0$,由于 $\det(D-\omega L)^{-1}=\dfrac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}\neq 0$,所以必有

$$\det\{(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U\}=0 \qquad (2)$$

假设 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ 至少存在一个特征值 $|\lambda|\geqslant 1$。由于 $A\in C_\alpha$,即对任意的 $i\in N$,$\alpha\in[0,1]$,皆有 $|a_{ii}|>\alpha R_i(A)+(1-\alpha)S_i(A)$ 成立。又由矩阵 A 的分解以及矩阵 L,U 的结构知,

$$R_i(A)=R_i(L+U)=R_i(L)+R_i(U),$$
$$S_i(A)=S_i(L+U)=S_i(L)+S_i(U) \qquad (3)$$

从而得到,对任意的 $i\in N,\alpha\in[0,1]$,皆有

$$|a_{ii}|>\alpha R_i(L+U)+(1-\alpha)S_i(L+U)=\alpha[R_i(L)+R_i(U)]+(1-\alpha)[S_i(L)+S_i(U)] \qquad (4)$$

由引理 3 知,此时 $|\lambda-1+\omega|\geqslant|\lambda|\omega$,(4)式左边乘以 $|\lambda-1+\omega|$,右边乘以 $|\lambda\omega|$,得,

$|\lambda-1+\omega||a_{ii}|>|\lambda|\omega\alpha R_i(L+U)+|\lambda|\omega\times(1-\alpha)S_i(L+U)=|\lambda|\omega\alpha[R_i(L)+R_i(U)]+|\lambda|\omega(1-\alpha)[S_i(L)+S_i(U)]=\alpha[R_i(\lambda\omega L)+R_i(\lambda\omega U)]+(1-\alpha)[S_i(\lambda\omega L)+S_i(\lambda\omega U)]$。

由于 $|\lambda|\geqslant 1$,由上式得

$|\lambda-1+\omega||a_{ii}|>\alpha[R_i(\lambda\omega L)+R_i(\omega U)]+(1-\alpha)[S_i(\lambda\omega L)+S_i(\omega U)]=\alpha R_i(\lambda\omega L+\omega U)+(1-\alpha)S_i(\lambda\omega L+\omega U)=\alpha R_i[(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U]+(1-\alpha)S_i[(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U]$,

说明 $(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U\in C_\alpha$,由引理 1 得到 $(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U$ 非奇异,与(2)式矛盾。所以 $|\lambda|\geqslant 1$ 不是 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ 的特征值。从而得知 $\rho(L_\omega)<1$,所以对任意初始向量解线性方程组 $Ax=b$ 的 SOR 迭代法都收敛。

其次,证明当 $A\in DD_\alpha$ 时,SOR 迭代法收敛。

由于 $A\in DD_\alpha$,则知,对 $\forall i,j\in N$,$|a_{ii}a_{jj}|>R_i^\alpha(A)S_i^{1-\alpha}(A)R_j^\alpha(A)S_j^{1-\alpha}(A)$ 成立,又由以上的证明过程及矩阵 L 和 U 的构成知,有

对 $\forall i,j\in N$,
$$|a_{ii}a_{jj}|>R_i^\alpha(L+U)S_i^{1-\alpha}(L+U)R_j^\alpha(L+U)S_j^{1-\alpha}(L+U)=[R_i(L)+R_i(U)]^\alpha\times[S_i(L)+S_i(U)]^{1-\alpha}[R_j(L)+R_j(U)]^\alpha[S_j(L)+S_j(U)]^{1-\alpha} \qquad (5)$$

成立。

同上,假设 $L_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ 至少存在一个特征值 $|\lambda|\geqslant 1$。注意到引理 3 的结论,(5)式左边乘以 $|\lambda-1+\omega|^2$,右边乘以 $|\lambda\omega|^2$ 得,

$|\lambda-1+\omega|^2|a_{ii}a_{jj}|>|\lambda\omega|^{\alpha}[R_i(L)+R_i(U)]^{\alpha}|\lambda\omega|^{1-\alpha}[S_i(L)+S_i(U)]^{1-\alpha}|\lambda\omega|^{\alpha}[R_j(L)+R_j(U)]^{\alpha}|\lambda\omega|^{1-\alpha}[S_j(L)+S_j(U)]^{1-\alpha}=[R_i(\lambda\omega L)+R_i(\lambda\omega U)]^{\alpha}[S_i(\lambda\omega L)+S_i(\lambda\omega U)]^{1-\alpha}[R_j(\lambda\omega L)+R_j(\lambda\omega U)]^{\alpha}[S_j(\lambda\omega L)+S_j(\lambda\omega U)]^{1-\alpha}$。

同样由于$|\lambda|\geqslant 1$,上式变为

$$|\lambda-1+\omega|^2|a_{ii}a_{jj}|>[R_i(\lambda\omega L)+R_i(\omega U)]^{\alpha}\times[S_i(\lambda\omega L)+S_i(\omega U)]^{1-\alpha}[R_j(\lambda\omega L)+R_j(\omega U)]^{\alpha}\times[S_j(\lambda\omega L)+S_j(\omega U)]^{1-\alpha}=R_i^{\alpha}(\lambda\omega L+\omega U)S_i^{1-\alpha}(\lambda\omega L+\omega U)R_j^{\alpha}(\lambda\omega L+\omega U)S_j^{1-\alpha}(\lambda\omega L+\omega U) \quad (6)$$

又由于对$\forall i\in N$,总有$R_i(\lambda\omega L+\omega U)=R_i[(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U]$及$S_i(\lambda\omega L+\omega U)=S_i[(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U]$成立。所以(6)式说明$(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U\in DD_{\alpha}$,由引理2得到$(\lambda-1+\omega)D-\lambda\omega L-\omega U$非奇异,与(2)式矛盾。所以$|\lambda|\geqslant 1$不是$L_{\omega}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$的特征值。从而得知$\rho(L_{\omega})<1$,所以对任意初始向量解线性方程组$Ax=b$的SOR迭代法都收敛。

推论1 若线性方程组$Ax=b$的系数矩阵$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$为下列情况之一,

(1)严格对角占优矩阵;(2)双严格对角占优矩阵;且ω满足$0<\omega\leqslant 1$,则有线性解方程组的SOR迭代法对任意初始向量都收敛。

证明 以上证明$A\in C_{\alpha}$或$A\in DD_{\alpha}$的过程中,取$\alpha=1$,就得到矩阵A满足:

$\forall i\in N$, $|a_{ii}|>R_i(A)$以及$\forall i,j\in N$, $i\neq j$, $|a_{ii}a_{jj}|>R_i(A)R_j(A)$,分别是矩阵$A$为严格对角占优矩阵和双严格对角占优矩阵。所以结论成立。

注:情况(1)显然是一般教科书中已有的结论。

定理2 若$A\in GC_{\alpha}$或$A\in GDD_{\alpha}$,即系数矩阵A为广义严格α-对角占优矩阵或广义双α-链严格对角占优矩阵,则当松弛因子ω满足$0<\omega\leqslant 1$时,对任意初始向量解线性方程组$Ax=b$的SOR迭代法都收敛。

证明 由于系数矩阵$A\in GC_{\alpha}$或$A\in GDD_{\alpha}$,即矩阵$Ad\in C_{\alpha}$或$Ad\in GDD_{\alpha}$,其中d为正对角矩阵。则由定理1知,对于矩阵A的分解$A=D-L-U$知,$Ad=Dd-Ld-Ud$,此时SOR迭代法的迭代矩阵:

$\bar{L}_{\omega}=(Dd-\omega Ld)^{-1}[(1-\omega)Dd+\omega Ud]=d^{-1}(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]d=d^{-1}L_{\omega}d$。此说明迭代矩阵$\bar{L}_{\omega}$与迭代矩阵$L_{\omega}$相似,从而有相同的特征值,所以$\rho(L_{\omega})=\rho(\bar{L}_{\omega})<1$,定理得证。

3 数值例子

例1 设方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}6&3&5\\1&4&2\\1&-1&5\end{pmatrix}$,取定义1和定义2中的$\alpha=\dfrac{1}{2}$,容易验证$A$满足:$|a_{ii}|>\dfrac{1}{2}[R_i(A)+S_i(A)]$;$i=1,2,3$,且满足:$|a_{ii}a_{jj}|>(R_i(A)S_i(A)R_j(A)S_j(A))^{\frac{1}{2}}$,$i,j=1,2,3$。即$A\in C_{\alpha}$且$A\in DD_{\alpha}$,所以由定理1知,解以$A$为系数矩阵的线性方程组时,对$\omega$满足$0<\omega\leqslant 1$,SOR迭代法对任意初始向量都是收敛的。事实上,我们通过分别取$\omega=0.2$,$\omega=0.4$,$\omega=0.6$,$\omega=0.8$等值,得到了$\rho(L_{0.2})=0.8735$,$\rho(L_{0.4})=0.72$,$\rho(L_{0.6})=0.5248$,$\rho(L_{0.8})=0.2946$,这与我们的结论是吻合的。

但若将A分解为

$$A=\begin{pmatrix}6&3&5\\1&4&2\\1&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5&3&3\\1&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7.5&0&-2\\0&-6&0\\-2&2&-4\end{pmatrix}=M-N。$$

由于$|m_{22}|=2$,而$R_2(M)=3$,$S_2(M)=4$,对$\forall\alpha\in[0,1]$,总有$3^{\alpha}4^{1-\alpha}>2=|m_{22}|$,所以$M$不满足$|m_{ii}|>R_i^{\alpha}(M)S_i^{1-\alpha}(M)$,$i=1,2,3$,文献[7]的定理3不再适用,从而无法估计迭代矩阵的谱半径。造成结论不再适用的主要原因是已有的结论是完全依赖于系数矩阵的分解,而我们的结论是直接针对系数矩阵而给出的。

例2 设系数矩阵$A=\begin{pmatrix}7&2&6\\7&8&1\\1&1&9\end{pmatrix}$,由于$|a_{11}a_{22}|=$

56，$R_1(A)R_2(A)=64$，所以不满足推论 1 的条件(2)，但若取正对角矩阵 $d=\mathrm{diag}(1,2,1)$，则 $Ad=\begin{pmatrix}7 & 4 & 6\\ 7 & 16 & 1\\ 1 & 2 & 9\end{pmatrix}$，容易验证，所以 Ad 为双严格对角占优矩阵，从而 A 为广义双严格对角占优矩阵，由定理 2 得知，解以 A 为系数矩阵的线性方程组时，对 ω 满足 $0<\omega\leqslant 1$，SOR 迭代法对任意初始向量都是收敛的。

参 考 文 献

1 Huang Tingzhu, Bai Zhongzhi. Bounds for spectral radii of iterative matrices. Joural of Applied Sciences(应用科学学报)，1998；16(3)：269—275

2 陈焯荣，黎　稳. 迭代矩阵谱半径的上界估计. 数学物理学报，2001；21A(1)：8—13

3 袁玉波，高中喜，黄廷祝，等. JOR 迭代法的收敛性. 电子科技大学学报，2003；32(6)：790—792

4 高中喜，黄廷祝，王广彬. 迭代法迭代阵谱半径新上界. 电子科技大学学报，2002；31(5)：542—545

5 路永洁，宋岱才. 关于 JOR 迭代法收敛性的一个注记. 辽宁石油化工大学学报，2007；27(2)：84—86

6 宋岱才，路永洁. 迭代矩阵谱半径的界限. 山东大学学报，2008；38(4)：123—126

7 冉瑞生，黄廷祝. 迭代矩阵特征值模的界. 电子科技大学学报，2006；35(1)：133—136

8 宋岱才，张钟元，路永洁. 某些迭代法的收敛性定理. 辽宁石油化工大学学报，2008；28(3)：75—78

9 宋岱才，姜凤利，田秋菊. 某些迭代法的一个收敛性定理. 山东大学学报(工学版)，2009；39(2)：146—150

α-Diagonal Strictly Dominance Matrix and Convergence Theorem of SOR Iteration Method

TIAN Qiu-ju，SONG Dai-cai*，GUO Xiao-ming

(School of Sciences, Liaoning University of Petroleum & Chemical Technology, Fushun 113001, P. R. China)

[**Abstract**]　For the linear equations system whose coefficient matrix is of α-diagonal strictly dominance or doubly α-chain diagonal strictly dominance, convergence properties of SOR iteration method are studied and some convergence theorems are given, which solves the problem of spectral radius of iterative matrices. Results obtained are applicable not only for α-diagonal strictly dominance matrix or doubly α-chain diagonal strictly dominance matrix, but also for generalized α-diagonal strictly dominance matrices. Finally, a numerical example is given for illustrating advantage of results.

[**Key words**]　α-diagonal strictly dominance matrix　doubly α-chain diagonal strictly dominance matrix　iteration method　convergence