第9卷 第23期 2009年12月
1671-1819(2009)23-7094-03
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 9 No. 23 Dec. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

关于无 *m* 次幂因子数的混合均值

黄 炜
(宝鸡职业技术学院基础部,宝鸡 721013)

摘 要 利用解析方法研究了无 m 次幂因子数的的性质,得到了几个有趣的混合均值渐近公式。

关键词 无 m 次幂因子数 均值 渐近公式
中图法分类号 O156. 4; **文献标志码** A

1 引言及结论

设 $k\geqslant 2$ 为给定的正整数,$n>1$,$n\in N$,为任意自然数。如果 $\forall m\in N^+$,$m>1$,有 $m^k \nmid n$,则称 n 为无 k 次幂因子数(如果它不是 $2^m,3^m,5^m,7^m,\cdots,p^m,\cdots$的积,即它不能被任一素数的 m 次幂整除)。在自然数集中(除去0和1)去掉所有素数的 m 次幂的积,则可以得到无 m 次幂因子数列。特别当 $k=2,3$ 时,称 n 为无平方因子数及无立方因子数。在文献[1]的第31个问题中,F. Samrandache 教授要求研究这个数列的性质,已有许多学者对这个数列的深入性质进行了研究,并获得了一系列的重要结果:谭宜家研究了无平方因子数的 k 次方和[2]。朱伟义研究了无立方因子数的性质[3]。张天平研究了无 m 次幂因子数的混合均值[4]等。本研究利用解析方法得到了无 m 次幂的均值公式,即得如下定理。

定理1 设 A 为无 m 次幂因子数的集合,$\zeta(m)$ 为 Riemann Zeta 函数,对任意实数 $x>1$,$m\geqslant 0$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} n = \frac{1}{2\zeta(m)}x^2 + O(x^{1+\frac{1}{m}+\varepsilon})。$$

推论1 若 B 为无立方幂因子数的集合,则对任意实数 $x>1$。有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}} n = \frac{1}{2\zeta(3)}x^2 + O(x^{\frac{4}{3}+\varepsilon})。$$

其中 ε 表示任意给定的正数。

定理2 设 A 为无 m 次幂因子数的集合,$\phi(n)$ 为 Euler 函数,对任意实数 $x>1$,$m\geqslant 0$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} \phi(a(n)) = \frac{1}{2\zeta(m)}x^2 \prod_p \left(1-\frac{p^{m-1}-1}{p(p^m-1)}\right) + O(x^{1+\frac{1}{m}+\varepsilon})。$$

其中:用 $\prod_p$ 表示对所有素数 p 求积,ε 表示任意给定的正数。

推论2 若 B 为无立方幂因子数的集合,则对任意实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}} \phi(a(n)) = \frac{1}{2\zeta(3)}x^2 \prod_p \left(1-\frac{p+1}{p^3+p^2+p)}\right) + O(x^{\frac{4}{3}+\varepsilon})。$$

其中:用 $\prod_p$ 表示对所有素数 p 求积,ε 表示任意给定的正数。

定理3 设 A 为无 m 次幂因子数的集合,$d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数,对任意实数 $x>1$, $k\geqslant 0$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} d(a(n)) = C_1 x\ln x + C_2 x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})。$$

2009年8月28日收到 国家自然科学基金项目(10271093)、陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)、宝鸡职业技术学院重点科研基金项目(ZK02216)资助

作者简介:黄 炜(1961—),男,硕士,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院副教授,研究方向:数论及数学应用。E-mial :wphvangwei@163. com。

其中 C_1,C_2 是可计算常数,ε 表示任意给定的正数。

推论 3 若 B 为无立方幂因子数的集合,则对任意实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}} d(a(n))=C_1x\ln x+C_2x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})。$$

$C_1=\dfrac{36}{\pi^4}$,C_2 可计算常熟,ε 表示任意给定的正数。

2 定理的证明

2.1 定理 1 的证明

为了方便,引入一个新的数论函数 $a(n)$,

$$a(n)=\begin{cases}0, & \text{if } n=1;\\ n, & \text{if } k^m\mid n,n>1,k\geqslant 2;\\ 0, & \text{if } k^m\mid n,n>1,k\geqslant 2。\end{cases}$$

显然有 $\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} n=\sum\limits_{n\leqslant x}a(n)$。

设 $f(s)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a(n)}{n^s}$,由 Euler 乘积公式[5]及 $a(n)$的定义有

$$f(s)=\prod_p\left(1+\frac{a(p)}{p^s}+\frac{a(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{a(p^{m-1})}{p^{m-1}}\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{p^1}{p^s}+\frac{p^2}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^{m-1}}{p^{(m-1)s}}\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2(s-1)}}+\cdots+\frac{1}{p^{(m-1)(s-1)}}\right)=$$

$$\prod_p\frac{1-\dfrac{1}{p^{(s-1)m}}}{1-\dfrac{1}{p^{s-1}}}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))} \qquad (1)$$

这里 $\zeta(s)$是黎曼的 Zeta 函数。并用 $\prod\limits_p$ 表示对所有素数 p 求积,根据式(1)及著名的 Perron 公式[3]:

$x=$正整数 N 时

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s_0+s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+$$

$$O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+$$

$$O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\lg x}{T}\right)\right)+$$

$$O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right)。$$

这里,O 常数仅和 σ_a,b_0 有关。其中 N 是离 x 最近的整数(x 为半奇数时,取 $N=x-\dfrac{1}{2}$),$\|x\|=|N-x|$;在上式中取 $s_0=0,b=3,T=x^{2-\frac{1}{m}},H(x)=x$,$B(\sigma)=\dfrac{1}{\sigma-2}$,可得

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{3-iT}^{3+iT}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{1+\frac{1}{m}+\varepsilon})。$$

为了估计 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{(3,T)}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$,即 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{3-iT}^{3+iT}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$,将积分限从 $s=3\pm iT$ 移到 $s=1+\dfrac{1}{m}\pm \mathrm{i}T$。考虑到函数 $f(s)=\dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\dfrac{x^s}{s}$ 在 $s=2$ 有一个一阶极点,其留数为 $\dfrac{x^2}{2\zeta(m)}$,由留数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{3-iT}^{3+iT}+\int_{3+iT}^{1+\frac{1}{m}+iT}+\int_{1+\frac{1}{m}+iT}^{1+\frac{1}{m}-iT}+\int_{1+\frac{1}{m}-iT}^{3-iT}\right)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\times\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=res_{s=2}f(s)\frac{x^s}{s}=\frac{x^2}{2\zeta(m)}。$$

我们可以容易地得到估计:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{3+iT}^{1+\frac{1}{m}+iT}+\int_{1+\frac{1}{m}-iT}^{3-iT}\right)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\int_{1+\frac{1}{m}}^{3}\left|\frac{\zeta(\sigma-1-iT)}{\zeta(m(\sigma-1-iT))}\frac{x^3}{T}\right|\leqslant\frac{x^3}{T}=x^{1+\frac{1}{m}} \qquad (2)$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{1+\frac{1}{m}+iT}^{1+\frac{1}{m}-iT}\right)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s)\right|\leqslant$$

$$\int_0^T\left|\frac{\zeta\left(\frac{1}{m}+iT\right)}{\zeta(m(1+imT))}\frac{x^{1+\frac{1}{m}}}{t}\right|\mathrm{d}t\leqslant x^{1+\frac{1}{m}+\varepsilon}。$$

从而有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}n=\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{1}{2\zeta(m)}x^2+O(x^{1+\frac{1}{m}+\varepsilon})。$$

定理 1 证毕。

2.2 定理 2 的证明

设 $g(s)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\phi(a(n))}{n^s}$,

$h(s)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{d(a(n))}{n^s}$。

由 Euler 乘积公式[5]及 $a(n)$ 的定义有

$$g(s)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(a(n))}{n^s}=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{\phi(a(p))}{p^s}+\frac{\phi(a(p^2))}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\phi(a(p^{m-1}))}{p^{m-1}}\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{p^1-1}{p^s}+\frac{p^2-p}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^{m-1}-p^{m-2}}{p^{(m-1)s}}\right)=$$

$$\prod_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^{(s-1)m}}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}-\frac{1}{p^s}\left(\frac{1-\frac{1}{p^{(s-1)(m-1)}}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right)\right)=$$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(m(s-1))}\prod_p\left(1-\frac{p^{(s-1)(m-1)}-1}{p(p^{(s-1)m}-1)}\right)。$$

由 Euler 积公式(文献[2]中定理 11.7)及 $d(n)$ 的定义,可得到

$$h(s)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(a(n))}{n^s}=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{d(a(p))}{p^s}+\frac{d(a(p^2))}{p^{2s}}+\cdots+\frac{d(a(p^{m-1}))}{p^{m-1}}\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{3}{p^{2s}}+\cdots+\frac{m}{p^{(m-1)s}}\right)=$$

$$\prod_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^{sm}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2}-\frac{\frac{m}{p^{sm}}}{1-\frac{1}{p^s}}\right)=$$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(ms)}\prod_p\left(1-\frac{(p^{(s-1)}-1)m}{p^s(p^{sm}-1)}\right)。$$

由著名的 Perron 公式[3]及证明定理 1 的方法我们很容易得到

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}\phi(a(n))=\frac{1}{2\zeta(m)}x^2\prod_p\left(1-\frac{p^{(m-1)}-1}{p(p^m-1)}\right)+O(x^{1+\frac{1}{m}+\varepsilon});$$

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}d(a(n))=C_1x\ln x+C_2x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})。$$

其中 C_1, C_2 是可计算常数。

参 考 文 献

1 Smarandache F. Only problems, not solutions. Chicago :Xiquan Publishing House, 1993

2 谭宜家. 无平方因子数的 k 次方和. 佛山师专学报,1988;6 (4):37—41

3 Zhu Weiyi. On the cube f ree number sequences. Smarandache Notions Journal,2004;14:271—273

4 张天平. 关于 m 次剩余数与无 k 次幂因子数的混合均值. 黑龙江大学自然科学学报,2003;20(4):11—14

5 Apostol T M. Int roduction to analytic number t heory. New York :Spring Verlag, 1976

6 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京:科学出版社, 1999

One Hybrid Mean Value Formula Involving of *m*-th Power Free Numbesr

HUANG Wei

(Department of on the Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P. R. China)

[**Abstract**] By using the analytic method the k-th power mean value for the m-th power free numbers is studied , and several interesting hybrid mean value asymptotic formula is obtained.

[**Key words**] m-th power free number mean value asymptotic formula