第 9 卷 第 23 期 2009 年 12 月
1671-1819(2009)23-7097-02

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 9 No. 23 Dec. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

关于指数丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$

周长根

(西北大学 数学系,西安 710127)

摘 要 设 r 是大于 1 的奇数,m 是偶数,U_r 和 V_r 是适合 $V_r+U_r\sqrt{-1}=(m+\sqrt{-1})^r$ 的整数。运用初等方法,证明了:如果 $a=|V_r|,b=|U_r|,c=m^2+1$ 且 b 是素数,$r\equiv3(\bmod 4)$,$m\equiv2(\bmod 4)$,$m>\frac{r}{\pi}$,那么方程 $a^x+b^y=c^z$ 仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,r)$。

关键词 指数丢番图方程 正整数解 解数

中图法分类号 O156.7; **文献标志码** A

设 N 是全体正整数的集合。设 a,b,c 是大于 1 且两两互素的正整数,方程

$$a^x+b^y=c^z,x,y,z\in N \tag{1}$$

是一类重要的指数丢番图方程。1944 年,Terai[1] 曾经提出如下的猜想:

猜想 1 如果存在正整数 p,q,r 适合 $\min(p,q,r)>1$ 且 $a^p+b^q=c^r$,方程(1)仅有正整数解 $(x,y,z)=(p,q,r)$。但是曹珍富[2] 给出了猜想 1 的反例,并提出猜想 1 应增加以下条件:$\max(a,b,c)>7$。然而乐茂华[3] 说明增加此条件后的猜想 1 仍然存在反例,建议将猜想 1 修改为:

猜想 2 方程(1)最多有一组解适合 $\min(x,y,z)>1$。但猜想 2 仍是一个远未解决的问题。

近年来,许多专家学者从不同角度得到了 Terai 猜想的一些重要结果。曹珍富[2],董晓蕾和曹珍富[4] 分别对于 c 和 b 是素数的情形得到了 Terai 猜想的一些结论。

现运用初等方法,得到了以下结论。

定理 设 r 是大于 1 的奇数,m 是偶数,U_r 和 V_r 是适合 $V_r+U_r\sqrt{-1}=(m+\sqrt{-1})^r$ 的整数,若 $a=|V_r|,b=|U_r|,c=m^2+1$ 且 b 是素数,$r\equiv3(\bmod 4)$,$m\equiv2(\bmod 4)$,$m>\frac{r}{\pi}$,则方程(1)仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,r)$。

证明 由于 U_r,V_r 适合

$$V_r+U_r\sqrt{-1}=(m+\sqrt{-1})^r \tag{2}$$

显然 U_r,V_r 适合

$$V_r-U_r\sqrt{-1}=(m-\sqrt{-1})^r \tag{3}$$

令

$$\alpha=m+\sqrt{-1},\beta=m-\sqrt{-1} \tag{4}$$

结合式(2)和式(3)可得

$$U_r=\frac{(m+\sqrt{-1})^r-(m-\sqrt{-1})^r}{2\sqrt{-1}}=\frac{\alpha^r-\beta^r}{2\sqrt{-1}} \tag{5}$$

由 $c=m^2+1$ 和式(4)可知 $c=\alpha\beta$,故有

$$\alpha=\sqrt{c}(\cos\theta+i\sin\theta),\beta=\sqrt{c}(\cos\theta-i\sin\theta) \tag{6}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$,θ 是满足

$$\tan\theta=\frac{1}{m},0<\theta<\frac{\pi}{2} \tag{7}$$

的唯一实数。

根据 de Moivre 公式,结合式(5)和式(6)可得

$$U_r=\sqrt{c^r}\sin r\theta \tag{8}$$

由式(7)可知 $\tan\theta=\frac{1}{m}$,$0<\theta=\arctan\frac{1}{m}<\frac{1}{m}$,又 $m>\frac{r}{\pi}$,从而

2009 年 8 月 24 日收到 陕西省教育厅自然科学专项基金(05JK303)资助

作者简介:周长根(1979—),陕西安康人,西北大学硕士生,研究方向:数论。E-mial:zcg_79@126.com。

$$0<\theta<r\theta<\frac{r}{m}<\pi,$$

于是 $\sin\theta>0,\sin r\theta>0$，进而由式(8)可知 $U_r>0$，故由 $b=|U_r|$ 可知 $b=U_r$。

由于 m 是偶数，故从式(2)可得

$$U_r=\sum_{k=0}^{\frac{(r-1)}{2}}(-1)^k\binom{r}{2k+1}m^{r-2k-1}\equiv(-1)^{\frac{(r-1)}{2}}\equiv r(\bmod 4) \tag{9}$$

由 $r\equiv3(\bmod 4)$ 以及式(9)可得

$$b=U_r\equiv r(\bmod 4)\equiv3(\bmod 4)。$$

于是，根据文献[4]中的定理可知，方程(1)在题设条件下仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,r)$。定理证毕。

致谢：衷心感谢导师袁进教授的悉心指导。

参 考 文 献

1 Terai N. The Diophantine equation $a^x+b^y=c^z$. Proc Japan Acad Ser A(Math Sci), 1994;70:22—26

2 Cao Z F. A note on the Diophantine equation $a^x+b^y=c^z$. Acta Arith (Math Sci), 1999;91(1):85—93

3 Le M H. On the Terai's conjecture concerning the exponential Diophantine equation $a^x+b^y=c^z$. Acta Mathematica Sinica(Chinese Series), 2003;46(2):245—250

4 Dong X L, Cao Z F. On Terai-Jesmanowicz conjecture concerning the equation $a^x+b^y=c^z$. Chinese Math Ann, 2000;21(A):709—714 (in Chinese)

On the Exponential Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$

ZHOU Chang-gen

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, P. R. China)

[**Abstract**] Let r be an odd integer with $r>1$, m be an even integer. Let U_r, V_r be integers satisfying $V_r+U_r\sqrt{-1}=(m+\sqrt{-1})^r$. By making use of elementary method, it is proved that if $a=|V_r|, b=|U_r|, c=m^2+1$, $r\equiv3(\bmod 4)$, $m\equiv2(\bmod 4)$, $m>\frac{r}{\pi}$ and b is a prime, then the equation $a^x+b^y=c^z$ has only the positive integer solution $(x,y,z)=(2,2,r)$.

[**Key words**] exponential diophantine equation positive integer solution number of solutions