第 9 卷 第 23 期 2009 年 12 月
1671-1819(2009)23-6953-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 9 No. 23 Dec. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

具偏差变元高阶中立型微分方程的周期解

陈仕洲

(韩山师范学院 数学与信息技术系，潮州 521041)

摘 要 利用重合度理论研究了一类具偏差变元高阶中立型泛函微分方程周期解的存在性。获得了该方程存在周期解的两个充分性结果，推广和改进了已有文献中的相关结论。

关键词 偏差变元 高阶 中立型泛函微分方程 周期解 重合度理论

中图法分类号 O175.11; **文献标志码** A

由于 Lienard 型方程具有较广泛的应用背景，因此一直受到人们极大的关注，也取得了许多重要成果[1—4]。但对具偏差变元的 Lienard 型方程周期解存在性的研究工作还不多，尤其是针对具偏差变元高阶中立型的则更少。现利用重合度理论[1]，给出具偏差变元高阶中立型泛函微分方程

$$(x(t)-rx(t-\sigma))^{(m)}+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(x(t-\sigma_i))x^{(i)}(t-\sigma_i)+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t) \qquad (1)$$

存在周期解的充分条件，其中 r 是实数且 $|r|\neq 1$，$m\geqslant 2$ 是整数，$f_i\in C(R,R)$ 且 $\forall u\in R$，$|f_i(u)|\leqslant a_i$，a_i,σ,σ_i 是实数且 σ_i 都是非负数，$i=1,2,\cdots,m-1$。$g\in C(R\times R,R)$ 且 $g(t+T,\cdot)=g(t,\cdot)$。$p(t),\tau(t)$ 都是周期为 T 的连续函数，且 $\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$。

设 $X=\{x\in C(R,R)\mid x(t+T)=x(t)\}$，其范数为 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$，则 X 在此范数下成为 Banach 空间。

定义算子

$$Lx=(x(t)-rx(t-\sigma))^{(m)},\quad Nx=-\sum_{i=1}^{m-1}f_i(x(t-\sigma_i))x^{(i)}(t-\sigma_i)-g(t,x(t-\tau(t)))+p(t)$$

同时定义投影算子

$$P:X\to\mathrm{Ker}L,\ x\mapsto Px=x(0)=x(T);$$

$$Q:X\to X/\mathrm{Im}L,\quad x\mapsto Qx=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t。$$

则有 $\mathrm{Ker}L=\mathrm{Im}P=R$，$\mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}L=\mathrm{Im}(I-P)$，从而有 $\dim(\mathrm{Ker}L)=\mathrm{codim}\ \mathrm{Im}L=1$。即 L 为指标为零的 Fredholm 算子，且 N 在 $\overline{\Omega}$ 上 L 紧，其中 Ω 是 X 中的有界开集。

显然，算子方程

$$Lx=\lambda Nx,\ \lambda\in(0,1] \qquad (2)$$

当 $\lambda=1$ 时，它在 $\mathrm{Dom}L\cap X$ 中的解即为方程(1)的 T 周期解。

本文的主要结果是：

定理 1 设存在常数 $A>0,B>0,C\geqslant 0$ 使得

1）当 $x\leqslant -A,t\in R$ 时，$g(t,x)\geqslant -(B+C|x|)$；

2）当 $|x|\geqslant A,t\in R$ 时，$xg(t,x)>0$；

3）$\sum\limits_{i=1}^{m-1}\left(\frac{T}{2}\right)^i|a_{m-i}|+2C\left(TA+\left(\left(\frac{T}{2}\right)^m\right)\right)<|1-|r||$，

则方程(1)存在一个 T 周期解。

证 设 $x(t)$ 是方程(2)的任一个 T 周期解，即

$$(x(t)-rx(t-\sigma))^{(m)}+\lambda\sum_{i=1}^{m-1}f_i(x(t-\sigma_i))x^{(i)}(t-\sigma_i)+\lambda g(t,x(t-\tau(t)))-\lambda p(t)=0 \qquad (3)$$

从 0 到 T 积分式(3)，得

2009 年 8 月 24 日收到

作者简介：陈仕洲(1959—)，广东潮阳人，副教授，本科，研究方向：泛函微分方程。

$$\int_0^T g(t,x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t=0 \tag{4}$$

可以断言$\exists t_0\in[0,T]$使得$|x(t_0-\tau(t_0))|\leqslant A$。否则，$\forall t\in[0,T]$，$|x(t-\tau(t))|>A$，由$x(t-\tau(t))$的连续性知，$\forall t\in[0,T]$，$x(t-\tau(t))>A$或$\forall t\in[0,T]$，$x(t-\tau(t))<-A$。再由条件1)和条件2)，得

$$\int_0^T g(t,x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t>0\text{或}\int_0^T g(t,x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t<0,$$

与(4)式矛盾。

记$t_0-\tau(t_0)=kT+t_1$，$t_1\in[0,T]$，则$|x(t_1)|\leqslant A$ (5)

记$E_1=\{t\in[0,T]\,|\,x(t-\tau(t))>A\}$，$E_2=[0,T]\setminus E_1$，因$g\in C(R\times R,R)$，$g(t,\cdot)=g(t+T,\cdot)$，故$\sup\limits_{(t,x)\in R\times[-A,A]}|g(t,x)|=\max\limits_{(t,x)\in[0,T]\times[-A,A]}|g(t,x)|<\infty$。

由条件1)和条件2)得

$$\int_{E2}|g(t,x(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t\leqslant T_{\max}\{B+C\|x\|,\sup_{(t,x)\in R\times[-A,A]}|g(t,x)|\} \tag{6}$$

由条件(1)和条件(4)得

$$\int_{E1}|g(t,x(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t\leqslant\int_{E2}|g(t,x(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t \tag{7}$$

由式(6)和式(7)得

$$\int_0^T|g(t,x(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t\leqslant 2T_{\max}\{B+C\|x\|,\sup_{(t,x)\in R\times[-A,A]}|g(t,x)|\} \tag{8}$$

设$t^*\in[\xi,\xi+T]$使得$|x'(t^*)|=\max\limits_{\xi\leqslant t\leqslant\xi+T}|x'(t)|$，则由

$$x'(t^*)=x'(\xi)+\int_\xi^{t^*}x''(s)\mathrm{d}s=\int_\xi^{t^*}x''(s)\mathrm{d}s,$$

$$x'(t^*)=x'(\xi+T)-\int_{t^*}^{\xi+T}x''(s)\mathrm{d}s=-\int_{t^*}^{\xi+T}x''(s)\mathrm{d}s,$$

得到$|x'(t^*)|\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_\xi^{t^*}|x''(s)|\mathrm{d}s+\int_{t^*}^{\xi+T}|x''(s)|\mathrm{d}s\right)=\frac{1}{2}\int_\xi^{\xi+T}|x''(s)|\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_0^T|x''(s)|\mathrm{d}s$。

从而推知$\int_0^T|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\frac{T}{2}\int_0^T|x''(s)|\mathrm{d}s$。类似地容易得到

$$\int_0^T|x^{(k)}(s)|\mathrm{d}s\leqslant\frac{T}{2}\int_0^T|x^{(k+1)}(s)|\mathrm{d}s,\ k=1,2,3,\cdots,m-1。 \tag{9}$$

$$\|x\|\leqslant A+\frac{1}{2}\int_0^T|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant A+\frac{T^{m-1}}{2^m}\int_0^T|x^{(m)}(s)|\mathrm{d}s \tag{10}$$

由式(3)、式(9)和式(10)可得

$$|1-|r||\int_0^T|(x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left|\int_0^T((x^{(m)}(t)-rx^{(m)}(t-\sigma))\mathrm{d}t\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m-1}\int_0^T|a_i||x^{(i)}(t-\sigma_i)|\mathrm{d}t+\int_0^T|g(t,x(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t+\int_0^T|p(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{T}{2}\right)^i|a_{m-i}|+2C\left(\mathrm{TA}+\left(\frac{T}{2}\right)^m\right)\right)\times\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t+2TM^*。$$

其中

$M^*=\max\{B,\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|p(t)|,\max\limits_{(t,x)\in R\times[-A,A]}|g(t,x)|\}<\infty$。

由条件3)知$\exists c>0$，使得$\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant c$。从而由式(9)和式(10)知$\exists M>R_0$，使得$|x^{(k)}(t)|<M$，$k=0,1,2,\cdots,m-1$。取$\Omega=\{x\in X,|x^{(k)}(t)|<M,k=0,1,2,\cdots,m-1\}$，则$\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall x\in\mathrm{Dom}L\cap\partial\Omega$，有$Lx\neq\lambda Nx$。又因$\forall x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega=x\in R\cap\partial\Omega$时，$x$为常数且$|x|=M>R_0$。故

$$QNx=-\frac{1}{T}\int_0^T|g(t,x(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t\neq 0。$$

作变换 $F(x,\alpha)=\alpha x+\frac{1}{T}(1-\alpha)\int_0^T g(t,x)\mathrm{d}t>0$

$\forall x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega=x\in R\cap\partial\Omega$及$\alpha\in[0,1]$，有

$$xF(x,\alpha)=\alpha x^2+\frac{1}{T}(1-\alpha)x\int_0^T g(t,x)\mathrm{d}t>0。$$

故$F(x,\alpha)\neq 0$。即$F(x,\alpha)$为同伦变换。因此

$$\deg\{QNx,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\} = \deg\left\{-\frac{1}{T}\int_0^T g(t,x)\,\mathrm{d}t,\right.$$

$$\left.\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\right\} = \deg\{-x,\Omega\cap R,0\}\neq 0。$$

根据重合度理论[1],方程(1)存在一个 T 周期解。

类似于定理 1 可证

定理 2 设存在常数 $A>0,B>0,C\geqslant 0$ 使得

1) 当 $x\geqslant A,t\in R$ 时,$g(t,x)\leqslant B+C|x|$;

2) 当 $|x|\geqslant A,t\in R$ 时,$xg(t,x)>0$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{m-1}\left(\frac{T}{2}\right)^i|a_{m-i}|+2C\left(TA+\left(\frac{T}{2}\right)^m\right)<|1-|r||$,则方程(1)至少存在一个 T 周期解。

注 1 当 $r=0,m=2,f_1=0,g(t,x(t-\tau(t)))=g(t-\tau(t))$ 时,方程(1)退化为 Duffing 方程,定理 1,2 推广和改进了文献[2]的结果。

注 2 当 $r=0,m=2,a_1=0,g(t,x(t-\tau(t)))=\beta(t)g(t-\tau(t))$ 时,方程(1)就是文献[3]所研究的方程,故本文的结论推广和改进了文献[3]的结果。

注 3 当 $r=0$ 时,本文的结论推广和改进了文献[4]的结果。

例 考察方程

$$(x(t)-10^{-1}x(t-\pi))^{(3)}-(16\pi)^{-1}x''(t)+(8\pi^2)^{-1}x'(t-\pi)+(x(t-\pi)+\sin t)e^{-x(t-\pi)}=\left(\frac{11}{10}-\frac{1}{8\pi^2}\right)\cos t+\frac{1}{16\pi}\sin t \tag{11}$$

这里 $m=3,r=10^{-1},a_1=(8\pi^2)^{-1},a_2=-(16\pi)^{-1},T=2\pi,\tau(t)=\pi,g(t,x)=(x+\sin t)e^{-x},p(t)=\left(\frac{11}{10}-\frac{1}{8\pi^2}\right)\cos t+\frac{1}{16\pi}\sin t$。令 $A=2,B=3$,易证方程(11)满足定理 2 的全部条件,故它有一个 2π 周期解。事实上,$x(t)=\sin t$ 就是方程(11)的一个 2π 周期解。

参 考 文 献

1 Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag,1977:568

2 黄先开,向子贵. 具有时滞的 Duffing 型方程 $\ddot{x}+g(x(t-\tau))=p(t)$ 的 2π 周期解. 科学通报,1994;39(3):201—203

3 李永昆. 具偏差变元的 Lienard 型方程的周期解. 数学研究与评论,1998;18(4):565—570

4 陈仕洲. 具偏差变元高阶 Lienard 型方程周期解存在性. 纯粹数学与应用数学,2006;22(1):108—110

Existence of Periodic Solutions for Higher Order Functional Differential Equation with Deviating Arguments

CHEN Shi-zhou

(Department of Mathematics and Information Technology, Hanshan Normal University,Chaozhou 521041,P. R. China)

[**Abstract**] By using the theorem of coincidence degree, existence of periodic solutions for a class of higher order neutral functional differential equation with deviating arguments is studied. Two sufficient conditions for the existence of periodic solutions are obtained. The results have extend and improved the related reports in the literatures.

[**Key words**] deviating argument higher order neutral functional differential equation periodic solution coincidence degree