

力学

压杆内力与频率关系的有限元法分析

龚玲玲 王荣辉

(华南理工大学土木与交通学院, 广州 510640)

摘要 采用三次函数作为压杆单元的位移函数, 基于能量变分原理, 构造了一种可以考虑初始内力及边界条件的压杆单元。采用该单元导出了可以充分考虑各种边界条件和变截面影响的有限元振动频率方程, 由此可得到压杆的内力与频率的对应关系, 并由 $\omega = 0$, 解得其临界值。采用 Matlab 软件编制了相应的内力及临界值计算的有限元程序。在此基础上, 分析了压杆的边界条件, 以及孔洞率等因素对频率计算的影响。

关键词 频率法 压杆稳定 临界值 有限元法

中图法分类号 O347.2; **文献标志码** A

压杆的稳定分析是结构稳定理论的最基本问题, 在现代结构以及桥梁等工程中具有非常高的研究价值。在工程上研究压杆的临界力的传统方法主要是静力法与能量法。近年来, 动力法也得到了一定的发展^[1-5]。但是目前的各种方法大多不能精确考虑压杆的边界条件影响, 对于边界条件的处理只能局限于若干种情况, 而对于变截面也不能精确处理。本文以三次函数作为压杆单元的位移函数, 基于能量变分原理, 导出了压杆系统的有限元自由振动方程。通过求解频率方程特征值问题, 可以得到压杆内力与频率的对应关系, 并由频率为零, 得到压杆的临界力值。应用 MATLAB 软件编制了相应计算的有限元程序。通过算例分析, 并与传统方法比较, 证明本文方法的合理性, 并且分析了压杆的计算长度、截面特性以及边界条件等因素对频率法计算频率与临界值的影响大小。本文运用有限元方法, 可以大大提高结果的精度, 对实际工程有重要的参考价值。

1 压杆单元形函数的确定

假设压杆单元 e 的位移函数为:

$$v(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (1)$$

单元长度为 l , 两节点 i, j 所对应的位移向量为:

$$\{v\}_e = \{\nu_i \quad \theta_i \quad \nu_j \quad \theta_j\}^T \quad (2)$$

则对横向运动, 由边界条件:

$$\begin{cases} v_i = v(0) = D \\ \theta_i = v'(0) = C \\ v_j = v(l) = Al^3 + Bl^2 + Cl + D \\ \theta_j = v'(l) = 3Al^2 + 2Bl + C \end{cases} \quad (3)$$

得:

$$v(x) = [x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1][A \quad B \quad C \quad D]^T = [N]\{v\}_e \quad (4)$$

式(4)中:

$$[N] = \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1, \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x, \\ -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2}, \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \quad (5)$$

2 系统刚度矩阵与质量矩阵

如图 1 为轴向受压力 P 的长压杆的计算模型简图。 k_1 和 k_3 为压杆两端点的横向刚度, k_2 和 k_4 为转角刚度。

不考虑轴向变形, 单元内的势能包括弯曲应变能 Π_w 、压力引起的轴向应变能 Π_U 和惯性力势能

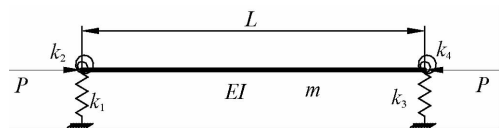


图1 计算模型简图

Π_F ,以及支座处的弹性势能 Π_T 。

其中:

$$\Pi_W = \int_0^l \frac{EI}{2} (v'')^2 dx, \Pi_U = - \frac{P}{2} \int_0^l (v')^2 dx,$$

$$\Pi_F = \int_0^l -m(\ddot{v})v dx, \Pi_T = \sum_{n=1}^4 \left(\frac{1}{2} k_n v_n^2 \right)。$$

由能量变分原理,有:

$$\delta \Pi_{\text{总}} = \delta (\Pi_U + \Pi_W + \Pi_F + \Pi_T) = 0 \tag{6}$$

得到系统的频率方程:

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0 \tag{7}$$

式(7)中:

$$[K] = \sum_{e=1}^n ([K_W]_e + [K_U]_e) + [K_T] =$$
$$\sum_{e=1}^n \left(\int_0^l EI [N]''^T [N]'' dx + \right.$$
$$\left. \int_0^l P [N]'^T [N]' dx \right) +$$
$$[K_T] = \sum_{e=1}^n EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & & & \\ & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \text{对称} \\ & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} \\ & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} -$$
$$P \begin{bmatrix} \frac{3}{5l} & & & \\ & \frac{1}{20} & \frac{l}{15} & \text{对称} \\ & -\frac{3}{5l} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{5l} \\ & \frac{1}{20} & -\frac{l}{60} & -\frac{1}{20} & \frac{l}{15} \end{bmatrix} +$$
$$\text{diag} \left(\underbrace{k_1, k_2, 0, \dots, 0, k_3, k_4}_{2n+2} \right) \tag{8}$$

式(8)中,diag 表示对角矩阵。

$$[M] = \sum_1^n [M]_e = \sum_1^n \left(m \int_0^l [N]^T [N] dx \right) =$$
$$\sum_{e=1}^n m \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & & & \\ & \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & \text{对称} \\ & \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & \frac{3}{5l} \\ & -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \tag{9}$$

3 压杆内力识别及临界力求解

运用以上的频率方法,可以得到压杆频率与内力的关系。编制相应的 MATLAB 程序,即可通过测得的压杆频率求得其压力值 P。当 P=0 时,压杆由激振产生的频率最大,随着压力的增大,频率减小,当压杆的频率 $\omega=0$ 时,压杆失稳,此时压杆内力达到其临界值。

4 算例

4.1 压杆临界力计算

某桥吊杆各项几何参数及材料参数如表 1 所示,其两端的边界条件是界于固支和简支的弹性状态,取 $k_1=k_3=1 \times 10^{10}, k_2=k_4=1 \times 10^7$ 。为了研究本文方法的合理性,分别对固支、简支以及弹性边界状态进行计算,并与传统欧拉公式进行比较。结果见表 2。

表 1 吊杆参数表

面积	弹模	弱轴惯矩	计算长度	线密度
A/m^2	E/Pa	I/m^4	$/\text{m}$	$/\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$
0.026 6	1.98×10^{11}	3.335×10^{-4}	20.74	210

表 2 各种情况下临界值计算结果

所取方法	边界条件处理	临界值/kN
欧拉公式	简支	1 514.3
	固支	6 057.4
本文方法	简支	1 512.8
	固支	6 043.8
	弹性	2 948.6

由表 2 可见,当边界条件取为简支或固支时,用本文方法与用欧拉公式产生的结果非常接近,(简支相差 0.1%,固支相差 0.23%),由此说明本文方法的合理性。结果表明,边界条件的是否精确对临界值有可能产生很大影响,故如何对边界条件进行有效识别有重要的研究价值。

4.2 频率计算影响因素分析

4.2.1 边界条件的影响

为了研究边界条件对频率的影响,假设压杆内力为 110 kN,取两端竖向刚度为 $k_1 = k_3 = 1 \times 10^{10}$ N/m,在各种转角刚度下产生的频率值如图 2 所示,由图可以看出,当转角刚度值 $k_2 = k_4 < 10^5$ N/m 时,频率计算值与简支情况相差不大,可以视为简支边界条件处理;当转角刚度值 $k_2 = k_4 > 5 \times 10^8$ N/m 时,频率值接近固支情况,此时可以视为固支边界条件处理。当 $10^5 < k_2 = k_4 < 5 \times 10^8$ N/m,边界条件的取值对频率值的影响较大。

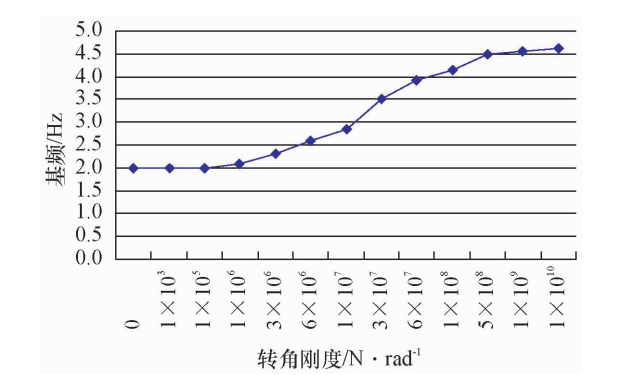


图2 转角刚度对基频的影响

4.2.2 孔洞率的影响

为了研究孔洞率对频率法进行吊杆测试的影响,采用以上方法对不同孔洞率的压杆频率进行分析。取边界条件为固支,两端压力值为 110 kN。鉴于孔洞在压杆内部的分布情况不同,对频率的影响也不同,在进行分析时,不改变孔洞的位置和高度,仅改变其宽度进行计算。各种孔洞率下吊杆的自振频率结果及忽略时产生的误差见表 3 所示。由表 3 可以看出,压杆的频率值与孔洞率近似成正比趋势,当孔洞率为 0.156 时,产生的误差为 9.8%。由此可见,对于有孔的压杆,当孔洞率较大时,不可以

忽略它对频率的影响。

表 3 各种孔洞率频率结果

孔洞率	频率值/Hz				忽略误差
	一阶	二阶	三阶	四阶	/%
0.000	4.612	12.771	25.081	41.493	0
0.040	4.716	13.050	25.634	42.436	2.24
0.059	4.765	13.184	25.898	42.893	3.32
0.108	4.907	13.566	26.654	44.189	6.39
0.156	5.064	14.022	27.536	45.557	9.80

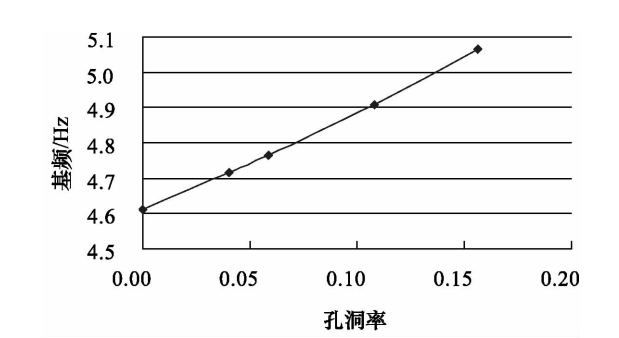


图3 孔洞率对频率结果影响图

5 结论

通过算例证明,本文基于振动理论,用有限元方法得到压杆横向振动的频率方程,由此得到内力与频率的关系式,并由频率为零时计算压杆的临界力是合理的。由算例分析了边界条件和带孔洞的压杆其孔洞率对频率的影响。本文方法由于可以充分考虑压杆的边界条件,以及变截面等的影响,可以大大提高临界力计算的精确度。对实际工程有重要意义。

参 考 文 献

1 刘茂燧,程渭民. 压杆稳定的动力分析. 南方冶金学院学报, 2004;(05):6—8
2 孙保苍,陈 威,何 仁. 基于振动理论的压杆稳定性分析. 噪声与振动控制,2005;(04):8—10
3 刘茂燧,程渭民,龚永胜. 振动测试压杆的临界力. 西安科技大学学报,2006;(02):279—282
4 陈 明,张秋华,严 勇. 测量压杆临界压力的理论与实验. 力学与实践,2007;(01):74—76

(下转第 6507 页)

The Application of FAO/UNEP-Land Cover Classification System

LU Peng, CHEN Sheng-bo, ZHOU Yun-xuan¹, HUANG Xin

(College of GeoExploration Sciences and Technology, JiLin University, Changchun 130026, P. R. China;
ECNU School of Resources and Environment Science, Shanghai 200062, P. R. China)

[**Abstract**] FAO/UNEP Land Cover Classification System(LCCS) is compared with USGS, IGBP, CORINE and UMD classification system. Its advantages and characteristic are concluded. Take Shitoukoimen land cover classification as example, based on LCCS, a Shidoukoumen classification graph by the method supervise classification is made of. The area is divided into six categories. Coordinates its mapping software GeoVis. , calculate the accuracy of each category, is less than 0.1. The result indicates LCCS is comprehensive, standardized *a priori* classification system. This method enhances the standardization process, and reduces the problem.

[**Key words**] FAO LCCS land cover classification

(上接第 6497 页)

5 任凤鸣, 范学明. 天兴洲长江大桥箱形带肋钢压杆稳定性. 建筑科学, 2008; (03): 12—14, 26

6 陈 骥. 钢结构稳定理论与设计. 北京: 科学出版社, 2003

A New Finite Element Solution for Internal Force and Frequencies Analysis of the Compressed Bar

GONG Ling-ling, WANG Rong-hui

(College of Civil Engineering and Communications South China University of Technology, Guangzhou 510640, P. R. China)

[**Abstract**] Use the cubic function to be the displacement function, then base on the energy variation principle, the natural vibration equation is derived, which considers the pressure force and the boundary conditions of the compressed bar. This method can take the influence of arbitrary boundary and variable cross-section into account. As the corresponding relation between the pressure and frequencies is obtained, the critical force can get by $\omega = 0$. Also, the influence of the sectional characteristic and boundary condition to this method is analysed.

[**Key words**] frequency equation stability of pressed bar critical force finite element method

(上接第 6502 页)

Synthesis of Cyclo(L-Ala-L-Pro) Dipeptide

GUO Shuai, HUANG Long-jiang, TENG Da-wei^{*}

(College of Chemical Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, P. R. China)

[**Abstract**] The Cyclo(L-Ala-L-Pro) dipeptide was first synthesized through neutralization, condensation, deprotection and cyclization in overall yield of 65.3% from N-Boc-L-(+)-Proline and L-(+)-Alanine. The structure is identified by IR, ¹H NMR, ¹³C NMR and Elemental analysis.

[**Key words**] Cyclo(L-Ala-L-Pro) dipeptide N-Boc-L-(+)-Proline L-(+)- Alanine synthesis