第9卷 第21期 2009年11月
1671-1819(2009)21-6489-03

科学技术与工程
Science Technology and Engineering

Vol. 9 No. 21 Nov. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

图的(3,1)-全标号

孙美姣 孙 磊
(山东师范大学数学科学学院,济南 250014)

摘 要 图 G 的 $(p,1)$-全标号是对 G 的点和边进行标号,满足:任意两个相邻的点得到不同的标号,任意两个相邻的边得到的标号也不同。并且任意一个点与和它相关联的边所得到的标号的差的绝对值至少为 p,其中在全标号中最大的标号与最小的标号的差值称为全标号的跨度,记一个 $(p,1)$-全标号中最小的跨度为 λ_p^T。证明了当 $p=3,\Delta(G)\geqslant 9$ 时,$\lambda_3^T\leqslant 2\Delta(G)+1$。

关键词 图 $(p,1)$-全标号 割

中图法分类号 O157.5; **文献标志码** A

在频道分配的问题上,为了避免干扰,如果两个站点是相邻的,那么分配给它们的频道至少差2。而且距离为2的站点让它们得到的频道也是不同的。对于这种问题 Griggs 和 Yeh[1] 提出了 $L(2,1)$-标号,$L(2,1)$-标号是一种点染色,后来推广到 $L(p,1)$-标号:若 $dG(u,v)=1,|e(u)-e(v)|\geqslant p$;若 $dG(u,v)=2,|l(u)-l(v)|\geqslant 1$。一个图 G 的关联图是指把图 G 的每一条边用长为2的路代替。图 G 的关联图的 $L(p,1)$-标号是对应于 G 的一个特别的全染色,这种全染色就是由 Haver 和 Yu[2,3] 提出的,称为 $(p,1)$—全标号。

定义1[2] 图 $G=(V,E)$ 的 $(p,1)-$ 全标号是满足下面条件的一个映射 $c:\cup E\rightarrow N$

(1) 若 $uv\in E,c(u)\neq c(v)$;

(2) 若 $uv,uw\in E,c(uv)\neq c(uw)$;

(3) $c(u)-c(uv)1\geqslant p$。

在 $(p,1)$-全标号中最大的标号与最小的标号的差值称为全标号的跨度,记一个 $(p,1)$-全标号中最小的跨度为 λ_p^T。

定义2[5] 设 P 是图 G 的点集 V 的一个部分,$V=A\cup B,A\cap B=\emptyset$,其中边集 $E(G)\setminus(E(A)\cup E(B))$ 称为 G 的割,记为 $[A,B]$。图 G 的一个割边数目最多的割称为 G 的最大割。

Havet 和 Yu[4] 已证得了 $(p,1)$-全标号的一个上界:$\lambda_p^T\leqslant 2\Delta+p-1$,而且在 Δ 值不是很大的情况下。对任意的 p,$\lambda_p^T\leqslant 2\Delta-2\lg(\Delta+2)+2\lg(16p-8)+p-1$,并且提出了 $(p,1)$-全标号猜想:$\lambda_p^T\leqslant\Delta(G)+2p-1$ 或者 $\lambda_p^T\leqslant\min\{\Delta(G)+2p-1,2\Delta+p-1\}$。当 $p=3$ 时,现证明了一个 $(3,1)$-全标号的上界,此上界要优于 Haver 和 Yu 所给的结果。

其他未加说明的概念和符号参见文献[5]。

引理1[4] 设 G 是一个图,若 $\Delta(G)=2k$,则 G 存在一个割 $[A,B]$,使得 $\Delta(A)\leqslant k-1,\Delta(B)\leqslant k$,若 $\Delta(G)=2k+1$,则 G 存在一个割 $[A,B]$,使得 $\Delta(A)\leqslant k,\Delta(B)\leqslant k$。

引理2[4] 设 G 是一个二部图,$\Delta(G)=\Delta$,则 G 在 $[1,\Delta]$ 范围内存在一个边染色 c,使得 $c(e)\geqslant i$ 当且仅当边 e 关联一个度至少是 i 的点。

引理3[4] 设 G 是一个图,$\Delta(G)\leqslant k$,则 G 在 $[0,2k+p-1]$ 范围内存在一个 $(p,1)$-全标号,使得每一个点得到的标号在 $[0,d(v)]$ 范围内,每一条边得到标号在 $[A+p-1,2k+p-1]$ 范围内。

引理4[4] 设 G 是一个图,$\Delta(G)\leqslant k$,则 G 在 $[0,2k+p-1]$ 范围内存在一个 $(p,1)$-全标号,使得每一个边得到的标号在 $[0,k]$ 范围内,每一个点得到标号在 $[k+p-1,k+p-1+d(v)]$ 范围内。

2009年7月20日收到 国家自然科学基金项目(60673047)资助
第一作者简介:孙美姣,女,硕士研究生,研究方向:图论与组合优化。E-mail:sunmeijiao163@163.com。

定理 1 任意图 G，$\Delta(G)\geqslant 9$，则 $\lambda_3^{T}\leqslant 2\Delta(G)+1$。

证明 1 $\Delta(G)$是偶数，记$\Delta(G)=2k,k\geqslant 5$。

由引理 1，考虑 G 的一个最大割$[A,B]$，其中$\Delta(A)\leqslant k-1,\Delta(B)\leqslant k$。

由引理 4 知，可以在$[1,2k+1]$范围内对 A 进行(3,1)-全标号，使得 A 中的每一个点 v 用$[k+2,k+2+d_A(v)]$内的标号标完，任意一条边 e 用$[1,k]$中的一个标号标完。

同理由引理 3 知，B 在$[0,2k+1]$上存在一个(3,1)-全标号，其中 B 中任意一点 v 的标号取自于$[0,d_B(v)]$，任意一条边 e 的标号取自于$[k+2,2k+2]$。

由引理 2 知，(A,B)在$[2k+2,4k+1]$上存在一个边染色，如果一条边标 $4k+2-i$ 当且仅当与这条边关联的点中至少有一个点在(A,B)中是 i 度。因此若一条边被标成 $2k+2$，则它关联着在(A,B)里度为 $2k$ 的点，因此它在 A 或 B 里是一个孤立点，若一条边被标成了 $2k+3$，则它关联着在(A,B)里度至少为 $2k-1$ 的点，因此这一个点在 A 或 B 里的度至多为 1 度。

因为要构造一个(3,1)-全标号，所以上述标号中有下述的情形是不允许的。

1）标 $2k+2$ 的边(a,b)，b 关联着一条边标号为 $2k+2$；

2）标 $2k+2$ 的边(a,b)，a 标成了 $2k+1$ 或 $2k$；

3）标 $2k+3$ 的边(a,b)，a 标成了 $2k+1$。因此对应地做如下调整。

对于情况 1），因为 b 点关联着至少一条边，故 b 点在 B 里不是孤立点，因此 a 点在 A 里是一个孤立点，故 α 点标成了 $k+2$。设 b 点的标号为 $l(b)$，若 $l(b)\geqslant 3$，则用 0 重新标(a,b)。若 $l(b)<3$，则用 5 重新标(a,b)，用 $k+3$ 重新标 a 点。因为 $k\geqslant 5$，故这样的一个标号是有效的。

对于情况 2），b 点为孤立点，则用良 $k+1$ 重新标(a,b)。

对于情况 3），b 点在 B 里至多为 1 度，若 b 点在 B 里关联的这条边为 $k+2$，则用 $2k-2$ 标(a,b)，若 b 点在 B 里关联的这条边为 $2k-2$，则用 $k+2$ 标(a,b)。若 $k+2=2k-2$，则 $k=4$，而在这里 $k\geqslant 5$，所以不会出现相等的情况。

$\Delta(G)$是奇数，记$\Delta(G)=2k+1,k\geqslant 4$。

由引理 1，考虑 G 的一个最大割$[A,B]$，其中$\Delta(A)\leqslant k,\Delta(B)\leqslant k$。

由引理 3 知，可以在$[0,2k+2]$范围内对 A 进行(3,1)-全标号，使得 A 中的每一个点 v 用$[0,d_A(v)]$内的标号标完，任意一条边 e 用$[k+2,2k+2]$中的一个标号标完。

同理由引理 4 知，B 在$[0,2k+2]$上存在一个(3,1)-全标号，其中 B 中任意一点 v 的标号取自于$[k+2,k+2+d_B(v)]$，任意一条边 e 的标号取自于$[0,k]$。

由引理 2 知，(A,B)在$[2k+3,4k+3]$上存在一个边染色，如果一条边标 $4k+4-i$ 当且仅当与这条边关联的点中至少有一个点在(A,B)中是 i 度，因此若一条边被标成 $2k+3$，则它关联着在(A,B)里度为 $2k+1$ 的点，因此它在 A 或 B 里是一个孤立点，若一条边被标成了 $2k+4$ 则它关联着在(A,B)里度至少为 $2k$ 的点，因此这一个点在 A 或 B 里的度至多为 1 度。

因为我们要构造一个(3,1)-全标号，所以上述标号中有下述的情形是不允许的。

1）标 $2k+3$ 的边(a,b)，b 被标成了 $2k+2$；

2）标 $2k+3$ 的边(a,b)，b 标成了 $2k+1$；

3）标 $2k+4$ 的边(a,b)，b 标成了 $2k+2$。

因此对应地做如下调整。

对于情况 1）和 2），b 点标成了 $2k+2$，故 b 点在 B 里度为 k，不是孤立点，因此 a 点在 A 里是一个孤立点，故 a 点标成了 0。用 $k+1$ 重新标(a,b)。

对于情况 3），b 点标成了 $2k+2$，故 a 点在 A 里的度至多为 1，因此 a 点被标成了 0 或 1，若 a 在 A 里关联边 $k+2$ 则用 $2k-1$ 重新标(a,b)。若 a 在 A 里关联边 $2k-1$，则用 $k+2$ 重新标(a,b)。因为 $k\geqslant 4$，所以 $k+2\neq 2k-1$，因此这样的一个标号是有效的。

参 考 文 献

1 Griggs J R, Yeh R K. Labeling graphs with a condition at distance two. SIAM J Discrete Mathematics, 1992;5:586—595

2 Havet F,Yu M. L. (d,1) – total labeling of graphs. Technical Report 4650,INRIA,2002

3 Havet F. (d,1) – total labeling of graphs. Workshop on Graphs and Algorithems,Dijon,France,2003

4 Havet F,Yu M. – L. (p,1) – Total Labeling of graphs. Discrete Mathematics,2008;308(4):496—513

5 Bollobas B. Modern graph theory. New York:Springer – Verlag,1998

(3,1)-Total Labeling of Graphs

SUN Mei-jiao, SUN Lei

(Department of Mathematics Science, Shandong Normal University, Jinan 250014,P. R. China)

[**Abstract**] A (p, 1)-total labeling of a graph G is a labeling of vertices and edges,such that any two adjacent vertices of G receive distinct integers, any two adjacent edges receive distinct integers,and a vertex and its incident edges receive integers that differ by at least p in absolute value . The span of a (p, 1)-total labeling is the minimum difference between the maxi-mum label and the minimum label . The minimum span λ_p^T. is noted when $p=3,\Delta\geqslant 9$, $\lambda_3^T \leqslant 2\Delta(G)+1$ is proved

[**Key words**] gragh (p, 1)-total labeling cut

(上接第 6485 页)

5 结论

讨论了第一类初等行变换和第二类初等列变换对矩阵的 QR 分解的影响,即随着母矩阵的变换,相应的 QR 分解中的正交矩阵 Q 和非奇异上三角矩阵 R 的变化规律,虽然进行第三类初等变换对 QR 分解影响没有严格的规律,但利用第三类初等变换给出了较为便捷的一种新的矩阵的 QR 的方法。

参 考 文 献

1 邹红星, 王殿军, 戴琼海,等. 行(或列)对称矩阵的 QR 分解. 中国科学(A 辑),2002;32(9):842—849

2 程鹏云. 矩阵论. 西安:西北工业大学出版社(第二版), 1998

3 Stewart G W. The decompositional approach to matrix computation. Computing in Science & Engineering, 2000;2:50—59

4 Parlett B N. The Q R algorithm. Computing in Science & Engineering, 2000;2:38—42

5 邹红星, 王殿军, 戴琼海,等. 延拓矩阵的奇异值分解. 科学通报, 2000;45(14):1560—1562

Elementary Transformation and the *QR* Decomposition of Matix

HE Bin-tao

(Department of Mathematics, Shaanxi University of Technology,Hanzhong 723000,P. R. China)

[**Abstract**] Main focuse on the relationship between elementary transformation and the QR decomposition of matix are inhoduced,the affect of the fist lementary transformation of line and the second elementary rank transformation to the QR decomposition of matix is discussed and a new mothed of the QR decomposition of matix by zhe category 3 elementary transformation is given

[**Key words**] elementary transformation QR decomposition mother matix