第9卷 第21期 2009年11月
1671-1819(2009)21-6279-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 9 No. 21 Nov. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

论 文

一般科技

指数型阻抗函数的双约束引力模型

刘 彤 巩丽媛 薛运强* 周 欣 倪亚洲
(济南公交科学技术研究院,济南 250031)

摘 要 研究了指数型阻抗函数的双约束引力模型,并用两种方法试验了指数型双约束引力模型的参数标定算法,掌握了这两种方法的异同。

关键词 指数函数 阻抗函数 双约束引力模型
中图法分类号 N945.12; **文献标志码** A

在交通需求预测当中,从出行发生预测可以知道对象区域各个分区出行产生量和出行吸引量。也就是要预测未来规划年各个分区之间的交通量。

现已开发的分布量预测方法主要有:增长率法、引力模型法(也称重力模型法)、机会模型法、熵最大模型法和概率模型法等等[1,2]。其中最常用的是增长率法和引力模型法。增长率法比较简单,但是没有考虑各个分区之间的交通阻抗。双约束引力模型不仅考虑了交通阻抗的因素,还能满足出行分布预测结果与预先作出的产生量和吸引量预测值相符,因此是一种比较好的分布量预测模型。

1 引力模型

引力模型是 Casey1955 年提出的,是受牛顿万有引力定律启发,其形式类似万有引力公式,其模型是[1]:

$$q_{ij} = K\frac{P_i^{\alpha}A_j^{\beta}}{R_{ij}^{\gamma}} \tag{1.1}$$

式(1.1)中,q_{ij}— i,j 分区之间的出行量(i 为产生区,j 为吸引区)预测值;

R_{ij}—两分区之间的交通阻抗;

P_i、A_j—分别为 i 区的出行产生量、分区 j 的吸引量;

α、β、γ、K 为待定系数假定它们不随时间和地点而改变。据经验,α、β 范围在 0.5—1.0,多数情况下,可取 $\alpha=\beta=1$。

事实上,引力模型更常写作

$$q_{ij} = KP_i^{\alpha}A_j^{\beta}f(R_{ij}) \tag{1.2}$$

式(1.2)中,$f(R_{ij})$为阻抗函数。

2 双约束引力模型

同时引进行约束系数和列约束系数的引力模型称双约束引力模型。其形式是[1]:

$$q_{ij} = K_iK'_jP_iA_jf(R_{ij}) \tag{2.1}$$

2009年7月14日收到 济南市科技计划专项(200807128)资助
第一作者简介:刘 彤,高级工程师,硕士。
* 通信作者简介:薛运强,助理工程师,硕士 E-mail:xueyun12345678@163.com。

$$K_i = \left(\sum_j K'_j A_j f(R_{ij})\right)^{-1}, (i = 1, \cdots, n) \tag{2.2}$$

$$K_j' = \left(\sum_i K_i P_i f(R_{ij})\right)^{-1}, (j = 1, \cdots, n) \tag{2.3}$$

式(2.3)中,K_i,K'_j 分别是行约束系数和列约束系数。

命题 2.1 双约束引力模型(2.1)式满足 $\sum_j q_{ij} = P_i, \sum_i q_{ij} = A_j$。

证明 由(2.1)式、(2.2)式易知:

$$q_{ij} = \left(\sum_j K'_j A_j f(R_{ij})\right)^{-1} K'_j P_i A_j f(R_{ij});$$

$$\sum_j q_{ij} = \sum_j \left(\left(\sum_j K'_j A_j f(R_{ij})\right)^{-1} K'_j P_i A_j f(R_{ij})\right) =$$
$$P_i \sum_j \left(\left(\sum_j K'_j A_j f(R_{ij})\right)^{-1} K'_j A_j f(R_{ij})\right) =$$
$$P_i \left(\left(\sum_j K'_j A_j f(R_{ij})\right)^{-1} \sum_j (K'_j A_j f(R_{ij}))\right) =$$
$$P_i 1 = P_i。$$

同理,可得 $\sum_i q_{ij} = A_j$。

3 指数型阻抗函数的双约束引力模型

阻抗函数 $f(R_{ij})$ 有多种形式[1],常用的有幂型 $f(R_{ij}) = R_{ij}^{-\gamma}$,指数型 $f(R_{ij}) = \exp(-bR_{ij})$,复合型 $f(R_{ij}) = e^{-bR_{ij}} R_{ij}^{-\gamma}$,半种型 $f(R_{ij}) = \dfrac{1}{a + bR_{ij}^{-\gamma}}$,离散型 $f(R_{ij}) = \sum_m r_m \delta_m^{ij}$。选用哪种类型的阻抗函数要视情况,一般看调查数据的散点图与哪类函数曲线吻合较好。由于幂型和指数型只含一个参数,比较容易标定,较常使用。

文献[1]中,以幂型阻抗函数为例给出了参数标定算法和实例。看一下指数型的相应情况,并探讨先定列约束系数与先定行约束系数的差异。

参数标定算法:

Step1:给参数 b 取初值,可以用已建立该模型的类似城市为估计初值,令 $b=1$。

Step2:用迭代法求约束系数 K_i,K'_j:

2-1、首先令各个列约束系数 $K'_j = 1(j=1,\cdots,n)$。(也可先令行约束系数 $K_i = 1,(i=1,\cdots,n)$,从例可看到过程会有一些差别,但结果是相似的。)

2-2、将各列约束系数 $K'_j = 1(j=1,\cdots,n)$ 代入(2.2)求各个行约束系数 K_i;

2-3、将求得的各个行约束系数 $K_i = 1,(i=1,\cdots,n)$ 代入(2.3)式求各个列约束系数 K'_j;

2-4、比较前后两组列约束系数,考察:相对误差是否小于3%? 若是,转到 Step3;否则,返回2-2。

Step3:将求得的约束系数 K_i,K'_j 代入(2.1)式,用现状的 P_i,A_j 值求现状的理论分布表$[\hat{q}_{ij}]$。

Step4:计算现状实际 PA 分布表的平均交通阻抗 $\overline{R} = \dfrac{1}{Q} \sum_i \sum_j q_{ij} R_{ij}$;计算理论分布表的平均交通阻抗 $\overline{\hat{R}} = \dfrac{\sum_i \sum_j \hat{q}_{ij} R_{ij}}{Q}$。求两者之间相对误差 δ:$\delta = \dfrac{(\overline{\hat{R}} - \overline{R})}{\overline{R}} \times 100\%$,当 $|\delta| < 3\%$ 接受关于 b 值的假设,否则执行下一步。

Step5:

当 $\delta < 0$,即 $\overline{\hat{R}} < \overline{R}$,说明理论分布量小于实际分布量,参数 b 选取太大了,令 $b = b/2$;反之,令 $b = 2b$。返回 Step2。

算法结束。

4 实例应用

通过一个参数标定实例,看一下指数型双约束引力模型的参数标定过程,以及先定列约束系数与先定行约束系数的差异。

例 有2个居住区(1、2号作为出行产生区)和3个就业分区(3、4、5号,作为出行吸引区),它们的现状分布表和作为阻抗的出行阻抗表$[R_{ij}]$,如下表1,求其指数型双约束引力模型:

$$q_{ij} = K_i K'_j P_i A_j e^{-bR_{ij}} \tag{4.1}$$

$$K_i = \left(\sum_j K'_j A_j e^{-bR_{ij}}\right)^{-1}, (i=1,\cdots,n) \tag{4.2}$$

$$K_j' = \left(\sum_i K_i P_i e^{-bR_{ij}}\right)^{-1}, (j = 1,\cdots,n) \tag{4.3}$$

表 1　现状分布矩阵和阻抗矩阵

现状 PA 出行分布量					交通阻抗 R_{ij}			
P	A				p	A		
	3	4	5	小计		3	4	5
1	150	100	50	300	1	3	2	5
2	400	100	200	700	2	3	5	4
小计	550	200	250	1 000				

解　方法一(先给列约束系数初值):

Step1 -1:参数 b 取初值,$b=1$。

Step1 -2: 用迭代法求约束系数 K_i,K'_j。

令列约束系数 $K'_3=K'_4=K'_5=1$ 代入式求两个行约束系数:

$$K_1=\left[\frac{1\times550}{e^3}+\frac{1\times200}{e^2}+\frac{1\times250}{e^5}\right]^{-1}=$$
$$56.134\ 431^{-1}=0.017\ 814, K_2=0.030\ 022。$$

将求得的 K_1、K_2 代入(4.3)式求:

$$K_3'=\left[\frac{0.017\ 814\times300}{e^3}+\frac{0.030\ 022\times700}{e^3}\right]^{-1}=1.312\ 358^{-1}=0.761\ 987。$$

$$K_4'=\left[\frac{0.017\ 814\times300}{e^2}+\frac{0.030\ 022\times700}{e^5}\right]^{-1}=1.156\ 239。$$

$$K_5'=\left[\frac{0.017\ 814\times300}{e^5}+\frac{0.030\ 022\times700}{e^4}\right]^{-1}=2.375\ 779。$$

第一次迭代结束。将新的代入(4.2)求第二遍迭代值 K_1、K_2:

$$K_1=\left[\frac{0.761\ 987\times550}{e^3}+\frac{1.156\ 239\times200}{e^2}+\frac{2.375\ 779\times250}{e^5}\right]^{-1}=0.017\ 805。$$

$$K_2=\left[\frac{0.761\ 987\times550}{e^3}+\frac{1.156\ 239\times200}{e^5}+\frac{2.375\ 779\times250}{e^4}\right]^{-1}=0.030\ 028。$$

由 K_1、K_2 求:$K'_3=0.030\ 028$,$K'_4=1.156\ 696$,$K'_5=2.375\ 403$。

此时,行列约束系数都已经达到3%的收敛要求。

Step1 -3:将 K_1、K_2、代入(4.1)式求现状分布理论值:

$$\hat{q}_{ij}=K_iK'_jP_iA_je^{-R_{ij}},$$

P	A			
	3	4	5	$\hat{P}_i$
1	111	167	21	300
2	439	33	229	700
$\hat{A}_j$	550	200	250	1 000

Step1 -4:检验。看 q_{ij}、$\hat{q}_{ij}$相关程度。

$$\bar{R}=\frac{150\times3+100\times2+50\times5+400\times3+100\times5+200\times4}{1\ 000}$$
$$=3.4。$$

$$\bar{\hat{R}}=\frac{111\times3+167\times2+521\times5+439\times3+33\times5+227\times4}{1\ 000}$$
$$=3.17。$$

$\delta=\dfrac{(\bar{\hat{R}}-\bar{R})}{\bar{R}}\times100\%<0$, 且 $|\delta|>3\%$。令 $b=1/2$,重新进行迭代:

Step2 -1: 参数 $b=1/2$。

Step2 -2: 用迭代法求约束系数 K_i,K'_j。

令列约束系数 $K'_3=K'_4=K'_5=1$ 代入式求两个行约束系数:

第一次迭代:

$K_1=0.004\ 612$、$K_2=0.005\ 781$、$K'_3=0.825\ 276$、$K'_4=1.188\ 774$、$K'_5=1.512\ 257$。

第二次迭代:

$K_1=0.004\ 550$、$K_2=0.005\ 815$、$K'_3=0.824\ 490$、$K'_4=1.195\ 737$、$K'_5=1.508\ 395$。

此时已经满足迭代收敛要求。

Step2 -3: 求现状分布理论值:

P	A			
	3	4	5	$\hat{P}_i$
1	138	120	42	300
2	412	80	208	700
$\hat{A}_j$	550	200	250	1 000

Step2 -4:检验。

$\overline{R}=3.4$，$\hat{\overline{R}}=3.331\ 981$，$|\delta|<3\%$，认为 $b=1/2$ 可接受。算例完。

方法二(先给行约束系数初值)：

Step1－1：参数 b 取初值，$b=1$。

Step1－2：用迭代法求约束系数 K_i，K'_j。

先令行约束系数 $K_1=K_2=1$，代入(4.3)式，求

第一次迭代：

$K'_3=0.020\ 086$、$K'_4=0.022\ 067$、$K'_5=0.067\ 375$、$K_1=0.793\ 151$、$K_2=1.164\ 598$。

经过六次迭代，我们得到满足收敛条件的行列约束系数：

$K'_3=0.028\ 012$、$K'_4=0.041\ 860$、$K'_5=0.087\ 589$、$K_1=0.488\ 371$、$K_2=0.816\ 641$。

Step1－3：求现状分布理论值：

P	A			
	3	4	5	$\hat{P}_i$
1	112	166	22	300
2	438	34	228	700
$\hat{A}_j$	550	200	250	1 000

Step2－4：检验。

$\overline{R}=3.4$，$\hat{\overline{R}}=3.170\ 992$，$\delta<0$，且 $|\delta|>3\%$。令 $b=1/2$，重新进行迭代：

Step2－1：参数 $b=1/2$.

Step2－2：用迭代法求约束系数 K_i，K'_j。

令行约束系数 $K_1=K_2=1$，代入(5.3)，求：

第一次迭代：

$K'_3=0.004\ 482$、$K'_4=0.005\ 959$、$K'_5=0.008\ 378$、、$K_1=0.861\ 816$、$K_2=1.160\ 340$。

第二次迭代：

$K'_3=0.004\ 185$、$K'_4=0.006\ 181$ 、$K'_5=0.007\ 625$、$K_1=0.888\ 975$、$K_2=1.145\ 344$。

第三次迭代：

$K'_3=0.004\ 195$、$K'_4=0.006\ 100$、$K'_5=0.007\ 669$、$K_1=0.892\ 062$、$K_2=1.143\ 648$。

此时已经满足迭代收敛要求。

Step2－3：求现状分布理论值(取整)：

P	A			
	3	4	5	$\hat{P}_i$
1	138	120	42	300
2	412	80	208	700
$\hat{A}_j$	550	200	250	1 000

Step2－4：检验。

$\overline{R}=3.4$，$\hat{\overline{R}}=3.332188$，$|\delta|<3\%$，认为 $b=1/2$ 可接受。算例完。

说明：先定列约束系数与先定行约束系数，在迭代过程中有一些差异，如先定行约束系数迭代的次数更多，但是最终殊途同归，在取整的情况下，两者预测的分布理论值是一致的。

参 考 文 献

1 刘灿齐.现代交通规划学.北京：人民交通出版社，2001

2 陆化普.交通规划理论与方法.北京：清华大学出版社，2006

Study on Double Constraint Gravity Model of Exponential Impedance Function

LIU Tong, GONG Li-yuan, XUE Yun-qiang, ZHOU Xin ,NI Ya-zhou

(Jinan Sustainable Transportation & Development Research Institute, Jinan 250022, P. R. China)

[**Abstract**] Double constraint gravity model of exponential impedance is studied, and used two methods to check parameter estimation algorithm of double constraint gravity model ,then the similarity and difference are got between the two methods.

[**Key words**] exponential funtion impedance function double constraint gravity model