第 9 卷 第 21 期 2009 年 11 月
1671-1819(2009)21-6283-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 9 No. 21 Nov. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

数学

矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 广义双对称解的迭代算法

周海林

(南京理工大学泰州科技学院,泰州 225300)

摘 要 对广义自反矩阵 P,即 $P^{\mathrm{T}}=P,P^2=I$,如果 $PXP=X,X^{\mathrm{T}}=X$,称 X 为广义双对称矩阵。在共轭梯度思想的启发下,给出了迭代算法求解约束矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 的广义双对称解及其最佳逼近。应用迭代算法,矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 的相容性可以在迭代过程中自动判断。当矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 有广义双对称解时,在有限的误差范围内,对任意初始广义双对称矩阵 X_1,运用迭代算法,经过有限步可得到矩阵方程的广义双对称解;选取合适的初始迭代矩阵,还可以迭代出极小范数广义对称解。而且,对任意给定的矩阵 X_0,矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 的最佳逼近广义双对称解可以通过迭代求解新的矩阵方程 $A\overline{X}B+C\overline{X}D=F$ 的极小范数广义双对称解得到。

关键词 约束矩阵方程 迭代算法 广义双对称解 极小范数解 最佳逼近

中图法分类号 O151.21; **文献标志码** A

记 $R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵集合,I_n 表示 n 阶单位阵。定义 $<A,B>=\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}A)$,则由它诱导的范数为 Frobenius 范数,即 $\|A\|=\sqrt{<A,A>}=\sqrt{\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)}$。对矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^{m\times n}$,其中 $a_i\in R^m$,$i=1,2,\cdots,n$,记 $\mathrm{vec}A=(a_1^{\mathrm{T}},a_2^{\mathrm{T}},\cdots,a_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,$A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 内积。

定义 1 对于广义自反矩阵 P,即 $P^T=P$,$P^2=I$。如果矩阵 X 满足 $PXP=X,X^{\mathrm{T}}=X$,称 X 为广义双对称矩阵,记广义双对称矩阵的集合为 $GBSR^{n\times n}$。

注:若无特别说明,文中出现的矩阵 P 均为广义自反矩阵。

本文主要考虑下面两个问题。

问题 I 给定矩阵 A、$C\in R^{m\times n}$,B、$D\in R^{n\times p}$,$F\in R^{m\times p}$,求 $X\in GBSR^{n\times n}$,使得

$$AXB+CXD=F \tag{1}$$

问题 II 当问题 I 相容时,记其解集合为 S_E,对给定的 $X_0\in R^{n\times n}$,求 $\overset{A}{X}\in S_E$,使得

$$\|\overset{A}{X}-X_0\|=\min_{X\in S_E}\|X-X_0\| \tag{2}$$

约束矩阵方程问题被国内外专家、学者研究了很多年,取得了很多成果[1—5]。本文中笔者拟构造迭代法给出矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 的广义双对称解及其最佳逼近。

特别地,当定义中的广义自反矩阵 P 为反序单位阵时,广义双对称阵 X 就是常见的双对称矩阵。因此,文中的算法可以直接用来求解矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 的双对称解。

1 迭代求解问题 I

算法:

1) 输入矩阵 A、$C\in R^{m\times n}$,B、$D\in R^{n\times p}$、$F\in R^{m\times p}$ 和自反矩阵 $P\in R^{n\times n}$,任取 $X_1\in GBSR_P^{n\times n}$。

2) 计算 $R_1=F-(AX_1B+CX_1D)$,$P_1=[(A^{\mathrm{T}}R_1B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}R_1D^{\mathrm{T}}+P(A^{\mathrm{T}}R_1B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}R_1D^{\mathrm{T}})P]/2$,$Q_1=(P_1+P_1^{\mathrm{T}})/2$,

3) 如果 $R_1=0$,则停止,$k=1$。

4) 计算 $X_{k+1}=X_k+\dfrac{\|R_k\|^2}{\|Q_k\|^2}Q_k$。

5) 计算 $R_{k+1}=F-(AX_{k+1}B+CX_{k+1}D)$,

2009 年 7 月 8 日收到
作者简介:周海林(1981—),湖南人,助教,硕士研究生,研究方向:数值代数与应用软件。

$P_{k+1}=(A^{\mathrm{T}}R_{k+1}B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}R_{k+1}D^{\mathrm{T}}+P(A^{\mathrm{T}}R_{k+1}B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}R_{k+1}D^{\mathrm{T}})P)/2$,

$Q_{k+1}=\frac{1}{2}(P_{k+1}+P_{k+1}^{\mathrm{T}})-\frac{\mathrm{tr}(P_{k+1}^{\mathrm{T}}Q_k)}{|Q_k|^2}Q_k$。

6）如果 $R_{k+1}=0$，或 $R_{k+1}\neq 0$、$Q_{k+1}=0$，停止；否则，使 $k=k+1$，回到4）。

显然，$Q_i\in GBSR_P^{n\times n}$，$X_i\in GBSR_P^{n\times n}$，$i=1,2,\cdots$。

引理1[6] 对上述迭代算法产生的 R_i,Q_i,P_i，$i=1,2,\cdots$，有

$$\mathrm{tr}(R_{i+1}^{\mathrm{T}}R_j)=\mathrm{tr}(R_i^{\mathrm{T}}R_j)-\frac{\|R_i\|^2}{\|Q_i\|^2}\mathrm{tr}(Q_i^{\mathrm{T}}P_j) \quad (3)$$

与参考文献[6]引理2和引理3的证明相类似，得到下面的引理2和引理3。

引理2 迭代过程中产生的 $R_i,Q_i(k\geqslant 2)$ 分别互相正交，即

$$\mathrm{tr}(R_i^{\mathrm{T}}R_j)=0,\mathrm{tr}(Q_i^{\mathrm{T}}Q_j)=0;\quad i,j=1,2,\cdots,k;i\neq j \quad (4)$$

引理3 设$\overline{X}$为问题Ⅰ的任一解，则

$$\mathrm{tr}[(\overline{X}-X_k)Q_k]=\|R_k\|^2,\quad k=1,2,\cdots \quad (5)$$

定理1 假定问题Ⅰ相容，那么对任意的初始矩阵 $X_1\in GBSR^{n\times n}$，问题Ⅰ的解可以通过有限步迭代得到。

证明 若 $R_i\neq 0,i=1,2,\cdots,mp$，则由引理3，有 $Q_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,mp$，于是由算法可以计算出 X_{mp+1}，R_{mp+1}。由引理2，有 $\mathrm{tr}(R_{mp+1}^{\mathrm{T}}R_i)=0$ 和 $\mathrm{tr}(R_i^{\mathrm{T}}R_j)=0,i=1,2,\cdots,mp;i\neq j$。因此，$R_1,R_2,\cdots,R_{mp}$是矩阵空间 $R^{m\times p}$ 的一组正交基，从而 $R_{mp+1}=0$，即 X_{mp+1}是问题Ⅰ的一个解。当问题Ⅰ相容时，可以证明问题Ⅰ的解可以通过最多不超过 t_0 $(t_0=\min(mp,n^2))$步得到。事实上，若 $n^2\leqslant mp$ 和 $R_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n^2$，则由迭代算法1，$Q_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n^2$，且可以计算 $X_{n^2+1},R_{n^2+1},Q_{n^2+1}$。跟前面的证明相类似，得到 $Q_{n^2+1}\neq 0$ 以及 $R_{n^2+1}=0$，从而 X_{n^2+1}就是问题Ⅰ的一个解。

推论1 问题Ⅰ不相容的充要条件是在算法1中存在某正整数 k，使得 $R_k\neq 0$ 而 $Q_k=0$。

引理4 矩阵方程(1)相容当且仅当矩阵方程组

$$\begin{cases}AXB+CXD+APXPB+CPXPD=2F\\ B^{\mathrm{T}}XA^{\mathrm{T}}+D^{\mathrm{T}}XC^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}PXPA^{\mathrm{T}}+D^{\mathrm{T}}PXPC^{\mathrm{T}}=2F^{\mathrm{T}}\end{cases} \quad (6)$$

相容。

证明 若式(1)有一个解 $X_0\in GBSR^{n\times n}$，那么，$X_0^{\mathrm{T}}=X_0,PX_0P=X_0$。显然，

$AXB+CXD+APXPB+CPXPD=2F$。因此，X_0也是方程组(6)的解。相反地，若矩阵方程组(6)有一个解$\overline{X}\in R^{n\times n}$，令$\hat{X}=\frac{1}{4}(\overline{X}+\overline{X}^{\mathrm{T}}+PXP+P\overline{X}^{\mathrm{T}}P)$，

则 $A\hat{X}B+C\hat{X}D=\frac{1}{4}(A\overline{X}B+A\overline{X}^{\mathrm{T}}B+AP\overline{X}PB+AP\overline{X}^{\mathrm{T}}PB)+\frac{1}{4}(C\overline{X}D+C\overline{X}^{\mathrm{T}}D+CP\overline{X}PD+CP\overline{X}^{\mathrm{T}}PD)=F$，且$\hat{X}\in GBSR^{n\times n}$。也就是说，矩阵方程(1)也有一个解$\hat{X}$。因此，矩阵方程(1)的可解性等价于矩阵方程组(6)的可解性。

引理5[7] 设相容线性方程组 $My=b$ 的一个解 $y_0\in R(M^{\mathrm{T}})$，则 y_0 必为此相容线性方程组的唯一的极小范数解。

定理2 设问题Ⅰ相容，若取初始矩阵

$X_1=A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BHA+C^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}+DHC+P(A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}})P+P(BHA+DHC)P$，其中 H 是 $R^{p\times m}$中的任意矩阵，特别地，使 $X_1=0\in R^{n\times n}$，则由迭代算法1，通过有限步可以得到问题I唯一的极小范数解。

证明 由迭代算法1和定理1知，若使 $X_1=A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BHA+C^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}+DHC+P(A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}})P+P(BHA^{\mathrm{T}}+DHC)P$，其中 H 是 $R^{p\times m}$中任意矩阵，则经过有限步迭代可得到问题Ⅰ的解 X^*，且可表示成 $X^*=A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BYA+C^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}+DYC+P(A^TY^TB^T+C^TY^TD^T)P+P(BYA+DYC)P$。由于矩阵方程(1)的双对称解也是矩阵方程组(6)的解，因此，要证明 X^* 是问题Ⅰ的极小范数解，只须证明 X^*是矩阵方程组(6)的极小范数解即可。

记 $\mathrm{vec}X=x$，$\mathrm{vec}X^*=x^*$，$\mathrm{vec}Y=y_1$，$\mathrm{vec}Y^{\mathrm{T}}=y_2$，$\mathrm{vec}F=c_1$，$vecF^{\mathrm{T}}=c_2$，则矩阵方程组(6)等价于如下线性方程组

$$\begin{bmatrix}B^{\mathrm{T}}\otimes A+D^{\mathrm{T}}\otimes C+B^{\mathrm{T}}P\otimes AP+D^{\mathrm{T}}P\otimes CP\\ A\otimes B^{\mathrm{T}}+C\otimes D^{\mathrm{T}}+AP\otimes B^{\mathrm{T}}P+CP\otimes D^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} \quad (7)$$

注意到

$$x^*=\mathrm{vec}X^*=(B\otimes A^{\mathrm{T}})y_2+(A^{\mathrm{T}}\otimes B)y_1+(D\otimes C^{\mathrm{T}})y_2+(C^{\mathrm{T}}\otimes D)y_1+(PB\otimes PA^{\mathrm{T}}+PD\otimes PC^{\mathrm{T}})y_2+(PA^{\mathrm{T}}\otimes PB+PC^{\mathrm{T}}\otimes PD)y_1=$$

$$\begin{bmatrix}A\otimes B^{\mathrm{T}}+C\otimes D^{\mathrm{T}}+AP\otimes B^{\mathrm{T}}P+CP\otimes D^{\mathrm{T}}P\\B^{\mathrm{T}}\otimes A+D^{\mathrm{T}}\otimes C+AP\otimes B^{\mathrm{T}}P+CP\otimes D^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in R\left(\begin{bmatrix}A\otimes B^{\mathrm{T}}+C\otimes D^{\mathrm{T}}+AP\otimes B^{\mathrm{T}}P+CP\otimes D^{\mathrm{T}}P\\B^{\mathrm{T}}\otimes A+D^{\mathrm{T}}\otimes C+AP\otimes B^{\mathrm{T}}P+CP\otimes D^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right),$$

由引理 5 知,x^* 是线性方程组(7)的极小范数解,而 vec 算子是同构的,因此,X^* 是矩阵方程组(6)唯一的极小范数解,从而 X^* 也是问题 Ⅰ 的唯一极小范数解。

2　问题Ⅱ的解

对任意给定的 $X\in S_E\subset GBSR^{n\times n}$,由于双对称矩阵与双反对称矩阵相互正交,故 $\|X-X_0\|^2=\|X-2^{-1}(X_0+X_0^{\mathrm{T}})\|^2+\|2^{-1}(X_0-X_0^{\mathrm{T}})\|^2$。因此,不失一般性,可假设问题 Ⅱ 中给定的 $X_0\in GBSR^{n\times n}$。当问题 Ⅰ 相容时,问题 Ⅰ 的解集 S_E 非空,对 $X\in S_E$,显然 $AXB+CXD=F\Leftrightarrow A(X-X_0)B+C(X-X_0)D=F-AX_0B-CX_0D$。让 $\overline{X}=X-X_0$, $\overline{F}=F-AX_0B-CX_0D$,则问题 Ⅱ 等价于求解相容矩阵方程 $A\overline{X}B+C\overline{X}D=\overline{F}$ 的极小范数广义双对称解 $\tilde{X}^*$。根据算法 1 和定理 1,可得到矩阵方程 $A\overline{X}B+C\overline{X}D=\overline{F}$ 的唯一极小范数广义对称解 $\overline{X^*}$,从而也就得到了问题 Ⅱ 的解 $\hat{X}$ 且 $\hat{X}$ 可表示成 $\hat{X}=\overline{X^*}+X_0$。

参 考 文 献

1. Lancaster P. Explicit solutions of linear matrix equations. SIAM Rev, 1970;12(4): 544—566
2. DAI Hua. On the symmetric solutions of linear matrix equations. Linear Algebra Appl, 1990;131: 1—7
3. XU Guiping, WEI Musheng, ZHENG Daosheng. On solution of matrix equation $AXB+CYD=F$. Linear Algebra Appl, 1998;279:93—109
4. Navarra A, Odell P L, Young D M. A representation of the general common solution to the matrix equations $A_1XB_1=C_1$ and $A_2XB_2=C_2$ with applications. Computs & Math Appl, 2001;41(7—8):929—935
5. Baksalary J K, Kala R. The matrix equation $AXB-CYD=E$. Linear Algebra Appl, 1980;30: 141—147
6. 周海林. 迭代求解约束矩阵方程 $AXB+CXD=F$ 相关问题. 兰州:兰州大学,2007
7. 彭亚新. 求解约束矩阵方程及其最佳逼近的迭代法的研究. 长沙:湖南大学,2004

An Iterative Algorithm for the Generalized Bisymmetric Solutions of $AXB+CXD=F$

ZHOU Hai-lin

(Taizhou Inst. of Sci. & Tech, NJUST, Taizhou 225300, P. R. China)

[**Abstract**]　For generalized reflection matrix P, *i. e.*, $P^{\mathrm{T}}=P$, $P^2=I$, then matrix X is said to be generalized bisymmetric, if $PXP=X$ and $X^{\mathrm{T}}=X$. Motivated by the conjugate gradient method, an iterative algorithm is presented to solve the constrained matrix equation $AXB+CXD=F$ over generalized bisymmetric matrix X and its optimal approximation. By this method, the solvability of the equation $AXB+CXD=F$ over generalized bisymmetric X can be determined automatically. When the equation $AXB+CXD=F$ is consistent over genealized bisymmetric X, its solution can be obtained within finite iteration steps in the absence of round off errors for any initial symmetric matrix X_1, and its least-norm generalized bisymmetric solution can be derived by chossing a suitable initial iterative matrix. Furthermore, its optimal approximation to the given matrix X_0 can be obtained by choosing the least-norm generalized bisymmetric solution of a new matrix equation $A\overline{X}B+C\overline{X}D=\overline{F}$.

[**Key words**]　constrained matrix equation　iterative algorithm　generalized bisymmetric solution　least-norm solution　optimal approximation