第9卷 第21期 2009年11月
1671-1819(2009)21-6484-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 21 Nov. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

研究简报

数学

初等变换与矩阵的 QR 分解的关系

和斌涛

(陕西理工学院数学系,汉中 723000)

摘 要 主要研究矩阵初等变换与矩阵的 QR 分解的关系。讨论了第一类,第二类矩阵的初等变换对矩阵的 QR 分解的影响,即初等变换后新矩阵的 Q 矩阵和 R 矩阵与母矩阵的 Q 矩阵和 R 矩阵之间的定量关系。并利用第三类初等变换给出了矩阵 QR 分解的新方法。

关键词 初等变换 QR 分解 母矩阵

中图法分类号 O151.21; **文献标志码** A

在矩阵计算中,矩阵的 QR 分解是矩阵基本分解方法之一,通常是用 Householder 变换或 Givens 变换或 Gram-Schmidet 正交化方法来实现的。邹红星、王殿军、戴琼海、李衍达[1],等研究了行(或列)对称矩阵的 QR 分解与母矩阵的 QR 分解形式之间的定量关系及快速算法。现将考虑对一个矩阵 A(称为母矩阵)施行第一类初等行变换和第二类初等列变换后,其相应的 QR 分解形式的变化规律, 并给出了利用第三类初等变换进行矩阵 QR 分解的新方法。

1 矩阵的 *QR* 分解

定理 1 实非奇异矩阵 A 能够化成正交矩阵 Q 和实非奇异上三角矩阵 R 的乘积,即

$$A = QR \tag{1}$$

称式(1)为 A 的 QR 分解。

证 记矩阵 A 的 n 个列向量依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,因为 A 非奇异,所以这 n 个列向量线性无关,将它们按 Schmidt 正交化方法正交化之,可得到 n 个标准正交向量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$。

对 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 正交化可得

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 - k_{21} b_1 \\ \vdots \\ b_n = a_n - k_{n,n-1} b_{n-1} - \cdots - k_{n1} b_1 \end{cases}$$

$$\text{其中 } k_{ij} = \frac{(a_i, b_j)}{(b_j, b_j)}, \quad (j > i) \tag{2}$$

将上式子改写为:

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = k_{21} b_1 + b_2 \\ \vdots \\ a_n = k_{n1} b_1 + k_{n2} b_2 + \cdots + k_{n,n-1} b_{n-1} + b_n \end{cases} \tag{3}$$

用矩阵形式表示为

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n) C \tag{4}$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}。$$

2009年7月6日收到

将 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 单位化可得

$q_i=\dfrac{b_i}{|b_i|},(i=1,2,\cdots,n)$。

于是有 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)C$

$$=(q_1,q_2,\cdots,q_n)\begin{bmatrix}|b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n|\end{bmatrix}C \quad (5)$$

令　$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$;

$R=\mathrm{diag}(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)C$。

则 $A=QR$,其中 Q 为正交矩阵,R 为实非奇异上三角矩阵。

2　矩阵初等行变换对矩阵的 *QR* 分解引起的变换

考虑矩阵的第一类初等行变换即互换矩阵 A 的 i,j 两行,利用矩阵的初等变换与初等矩阵的关系知这一变换过程等价于给矩阵 A 左乘初等矩阵 $P(i,j)$,且 $P(i,j)$ 为正交矩阵,故类似于定理 1 的式(5)有

$$P(i,j)A=P(i,j)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=P(i,j)(b_1,b_2,\cdots,b_n)C=P(i,j)(q_1,q_2,\cdots,q_n)\mathrm{diag}(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)C。$$

令 $Q'=P(i,j)(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 为正交矩阵,

$R'=\mathrm{diag}(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)C$ 为上三角阵则有

$P(i,j)A=Q'R',Q'=P(i,j)Q,R'=R$。

于是有下面的结论。

定理 2　若将 A 的第 i 行和第 j 行互换,则变化后的 Q' 可以通过对母矩阵的 Q 交换第 i 行和第 j 行而得到,而变化后的矩阵的 R' 矩阵与母矩阵的 R 矩阵相同。

3　矩阵初等列变换对矩阵的 QR 分解引起的变换

考虑矩阵的第二类初等列变换即矩阵 A 的第 i 列各元素都乘以 k,即给矩阵 A 右乘初等矩阵 $P(i(k))$,于是类似于定理 1 的式(5)有

$$AP(i(k))=(a_1,a_2,\cdots,a_n)P(i(k))=(b_1,b_2,\cdots,b_n)CP(i(k))=(q_1,q_2,\cdots,q_n)\mathrm{diag}(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)CP(i(k))。$$

令 $Q'=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 为正交矩阵,$R'=\mathrm{diag}(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)CP(i(k))$。

则有 $P(i,j)A=Q'R'$; $Q'=Q$;

$R'=RP(i(k))$。

于是有下面的结论。

定理 3　给矩阵 A 的任意一列乘以一个常数 k,其对应的新矩阵的 QR 分解形式中 Q 不变,而 R 的对应列乘以常数 k,其他列不变。

4　利用第三类初等变换进行矩阵的 *QR* 分解

虽然对矩阵进行第三类初等变换后矩阵的 QR 分解没前面那么严格的变换规律,但利用第三类初等变换可直接进行矩阵的 QR 分解。

定理 4　A 是 n 阶非奇异矩阵,则 A 总可经过一对第 3 种行和列的初等变换分解为 $A=QR$ 的形式,其中 Q 为正交矩阵,R 为非奇异的上三角矩阵。

证　因为 A 非奇异,故 $A^{\mathrm{T}}A$ 正定对称,对 $A^{\mathrm{T}}A$ 分别同时实施 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次行和列的第三类初等变换可将 $A^{\mathrm{T}}A$ 化为对角阵,且主对角线上的元素全为正实数,即存在上三角矩阵 B 和下三角矩阵 B^{T} 使得

$B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)B=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)(d_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 设

$$C=\begin{bmatrix}\sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n}\end{bmatrix}$$

则

$$C^{-1}[B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)B]C^{-1}=(C^{-1}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(ABC^{-1})=(ABC^{-1})^{\mathrm{T}}(ABC^{-1})=E。$$

可见 ABC^{-1} 是正交矩阵,故令 $Q=ABC^{-1}$,$R=CB^{-1}$ 其中 Q 为正交矩阵,R 为非奇异的上三角矩阵。

(下转第 6491 页)

参 考 文 献

1 Griggs J R, Yeh R K. Labeling graphs with a condition at distance two. SIAM J Discrete Mathematics, 1992;5:586—595
2 Havet F, Yu M. L. (d,1) – total labeling of graphs. Technical Report 4650, INRIA, 2002
3 Havet F. (d,1) – total labeling of graphs. Workshop on Graphs and Algorithems, Dijon, France, 2003
4 Havet F, Yu M. – L. (p,1) – Total Labeling of graphs. Discrete Mathematics, 2008;308(4):496—513
5 Bollobas B. Modern graph theory. New York: Springer – Verlag, 1998

(3,1)-Total Labeling of Graphs

SUN Mei-jiao, SUN Lei

(Department of Mathematics Science, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**] A (p, 1)-total labeling of a graph G is a labeling of vertices and edges, such that any two adjacent vertices of G receive distinct integers, any two adjacent edges receive distinct integers, and a vertex and its incident edges receive integers that differ by at least p in absolute value. The span of a (p, 1)-total labeling is the minimum difference between the maxi-mum label and the minimum label. The minimum span λ_p^T. is noted when $p=3, \Delta \geqslant 9$, $\lambda_3^T \leqslant 2\Delta(G)+1$ is proved

[**Key words**] gragh (p, 1)-total labeling cut

(上接第 6485 页)

5 结论

讨论了第一类初等行变换和第二类初等列变换对矩阵的 QR 分解的影响,即随着母矩阵的变换,相应的 QR 分解中的正交矩阵 Q 和非奇异上三角矩阵 R 的变化规律,虽然进行第三类初等变换对 QR 分解影响没有严格的规律,但利用第三类初等变换给出了较为便捷的一种新的矩阵的 QR 的方法。

参 考 文 献

1 邹红星, 王殿军, 戴琼海, 等. 行(或列)对称矩阵的 QR 分解. 中国科学(A 辑), 2002;32(9):842—849
2 程鹏云. 矩阵论. 西安:西北工业大学出版社(第二版), 1998
3 Stewart G W. The decompositional approach to matrix computation. Computing in Science & Engineering, 2000;2:50—59
4 Parlett B N. The Q R algorithm. Computing in Science & Engineering, 2000;2:38—42
5 邹红星, 王殿军, 戴琼海, 等. 延拓矩阵的奇异值分解. 科学通报, 2000;45(14):1560—1562

Elementary Transformation and the *QR* Decomposition of Matix

HE Bin-tao

(Department of Mathematics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723000, P. R. China)

[**Abstract**] Main focuse on the relationship between elementary transformation and the QR decomposition of matix are inhoduced, the affect of the fist lementary transformation of line and the second elementary rank transformation to the QR decomposition of matix is discussed and a new mothed of the QR decomposition of matix by zhe category 3 elementary transformation is given

[**Key words**] elementary transformation QR decomposition mother matix