2020 年 第 20 卷 第 29 期
2020, 20(29): 12065 -06

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

ISSN 1671—1815
CN 11—4688/T

引用格式:翁志坚, 邱晨杰, 邱福祥, 等. 基于马尔科夫优化的灰色 GM (1,1) 沉降预测模型及应用[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(29): 12065-12070

Weng Zhijian, Qiu Chenjie, Qiu Fuxiang, et al. An optimized GM(1,1) grey prediction model based on Markov chain and its application [J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(29): 12065-12070

基于马尔科夫优化的灰色 GM (1,1) 沉降预测模型及应用

翁志坚, 邱晨杰, 邱福祥, 杨芸红, 卢如发, 何生龙

(中铁二十四局集团福建铁路建设有限公司, 福州 352000)

摘　要　针对灰色 GM(1,1)模型在对随机波动较大的沉降数据序列进行预测时存在的不足,结合灰色理论模型和马尔科夫链理论,建立一种基于马尔科夫修正的新维 GM(1,1)沉降预测模型。首先,考虑监测数据的时效性,通过在原始数据列中不断补充新的沉降监测数据,采用新陈代谢的方法建立新维 GM(1,1)模型;随后采用马尔科夫链理论对新维 GM(1,1)模型进行优化,根据模型预测时产生的相对误差范围对其进行状态区间划分,并构建相应的状态转移概率矩阵,得到了基于马尔科夫优化的新维 GM(1,1)预测模型;将本文模型应用于福州火车站南广场深基坑周边建筑物地表沉降预测中,并对不同模型的预测效果进行对比分析,结果表明:基于马尔科夫优化的灰色 GM(1,1)模型的预测精度较传统灰色 GM(1,1)模型有明显提高,验证了本文模型在基坑沉降分析与预测中的合理性。

关键词　灰色理论; 马尔科夫链; GM(1,1)模型; 沉降预测

中图法分类号　TU470;　　　　**文献标志码**　A

An Optimized GM(1,1) Grey Prediction Model Based on Markov Chain and Its Application

WENG Zhi-jian, QIU Chen-jie, QIU Fu-xiang, YANG Yun-hong, LU Ru-fa, HE Sheng-long

(Fujian Railway Construction Co., Ltd., China Railway 24th Bureau Group Co., Ltd., Fuzhou 352000, China)

[**Abstract**]　Aiming at the shortcomings of the grey GM(1,1) model in settlement prediction in which large random fluctuations would appear, an optimized model was proposed combining the grey theory model and Markov chain theory. First, considering the timeliness of monitoring data, an improved GM(1,1) model was established by adding newest monitoring data to the original data column. Secondly, the Markov chain theory was applied to GM(1,1) model and the state interval was divided according to the relative error range. The optimized GM(1,1) model based on Markov chain was obtained by constructing the corresponding state transition probability matrix. All models proposed were applied to the prediction of ground settlement of buildings around a deep foundation pit of the south square of Fuzhou Railway Station, and the prediction results of different models were compared and analyzed. The results show that the prediction accuracy of the optimized model is higher than that of the traditional grey GM (1,1) model, and the rationality of the optimized model is also verified for analysis and prediction of foundation pit settlement.

[**Key words**]　grey theory; Markov chain; GM(1,1) model; settlement prediction

目前城市建设过程中对于地下空间的利用和开发越来越重视,随之带来的各种复杂条件下大型深基坑工程问题也越来越多。随着城市深基坑工程规模越来越大,且周边环境越来越复杂,开挖过程中深基坑工程的安全问题也引起了学者们的广泛关注。沉降变形观测是基坑施工过程中的重要环节[1],通过对施工过程中基坑支护结构的变形及地表、周边的沉降进行实时监测,可以有效及时地发现问题,从而保证基坑工程施工的安全进行。中外许多学者对沉降预测方法进行了研究,目前常用的有双曲线法[2]、Asaoka 法[3]、神经网络法[4-5]、灰色理论法[6-8]等,其中灰色理论法由于只需较少的数据样本即可对沉降进行有效的预测,因此在沉降变形预测中得到了较为广泛应用。李小刚等[9]采用灰色 GM(1,1)模型对某道路地基沉降过程进行预测,并将预测结果与规范中的双曲线法、三点法预测结果进行了对比分析,结果表明灰色 GM(1,1)模型的预测精度更高。刘寒冰等[10]在灰色 GM(1,1)模型的基础上,提出了考虑多监测点间相关性的多变量 MGM(1,n)灰色模型。张闯等[11]、傅家俊

收稿日期: 2019-11-25;　　修订日期: 2020-04-10

第一作者: 翁志坚(1967—),男,汉族,福建莆田人,硕士,高级工程师。研究方向:岩土与地下工程管理。E-mail:3107366142@qq.com。

等[12]在传统灰色 Verhulst 模型的基础上,提出采用离散化方法对原始数据列进行倒数变换,由此建立了优化的灰色 Verhulst 模型,通过工程实例验证了优化后的模型较传统灰色 Verhulst 模型具有更好的预测精度。何亚伯等[13]、唐葭等[14]针对实际工程中非等间距的观测数据,分别提出采用 3 次样条插值法和最小二乘法对原始数据的非等距关系进行处理,随后采用处理后的数据进行 GM(1,1)模型建模分析,由此建立了非等距时间序列模型,并采用该模型分别对隧道拱顶位移和路基沉降进行预测分析。

实际工程中由于监测数据受到外界各种因素的影响,其往往具有较大的波动性,而灰色理论法对波动较大的数据进行预测时会存在一定的误差。马尔科夫链(Markov chain)理论能较好地描述预测对象随机的动态变化过程,通过对研究各状态间的转移概率来对预测对象下一步的状态进行预测,目前该理论已在公共交通和沉降变形分析等领域中得到广泛应用[15-16]。现在灰色 GM(1,1)模型的基础上,结合马尔科夫链理论,提出基于马尔科夫优化的新维 GM(1,1)沉降预测模型,并结合福州市火车北站南广场深基坑工程施工过程的周边地表沉降观测数据,对本文模型的合理性和准确性进行验证。研究结果可为相关城市深基坑工程的沉降变形预测提供参考。

1 灰色 GM(1,1)模型

灰色 GM(1,1)模型是灰色系统理论中应用最为广泛的模型,该模型的基本思想是首先对原始数据进行一次累加,采用累加后的数据列进行建模计算,最后将模型计算值进行累减后即可得到预测值。具体步骤如下。

设有原始非负数据列为

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\} \tag{1}$$

将原始数据列进行一次累加处理,得到累加后的数据列为

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)\} \tag{2}$$

式(2)中:$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i), k = 1,2,\cdots,n$。

灰色 GM(1,1)模型的白化微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}X^{(1)}}{\mathrm{d}t} + aX^{(1)} = b \tag{3}$$

式(3)中:a、b 为参数。

通过对方程进行离散化,得到灰色 GM(1,1)模型为

$$X^{(0)}(k) + aZ^{(1)}(k) = b \tag{4}$$

式(4)中:$Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值数据列,即 $Z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}[x^{(0)}(k-1) + x^{(0)}(k)]$。

参数 a、b 可采用最小二乘法进行确定,即

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [a \quad b]^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{5}$$

式(5)中:

$$\boldsymbol{Y} = [x^{(0)}(2) \quad x^{(0)}(3) \quad \cdots \quad x^{(0)}(n)]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & 1 \\ -Z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

根据式(5)求得参数 a、b 后,将其代入式(4)中即可得到模型的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(1)}(1) - \frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-ak} + \frac{b}{a} \tag{8}$$

将式(8)计算得到的结果通过累减,即可求得模型的预测值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \tag{9}$$

2 新维 GM(1,1)模型

基坑沉降监测过程中,随着监测的进行会不断有新的观测数据补充进来。在对基坑沉降进行预测时,初期的旧数据将对预测结果的影响越来越小,而新的观测数据更能体现基坑沉降的发展趋势,即实测沉降数据具有明显的时效性。曹文贵等[17]也指出,实测数据的新旧程度对沉降预测的效果具有显著的影响,距离预测时间点越接近的实测数据对沉降预测的影响越大。为了更准确地对基坑沉降变形进行预测,需要不断更新观测数据且将旧数据剔除,才能提高模型预测的精确度。为此,基于新陈代谢的思想,建立了新维 GM(1,1)模型,其具体步骤为:使用 n 维的原始数据列进行初始 GM(1,1)模型建模,并对第 $n+1$ 时序的沉降进行预测;在获得第 $n+1$ 时序的实测值后,将第一个实测值进行剔除,并将第 $n+1$ 时序的实测值添加到数据列中,实现原始数据列的等维。采用更新后的数据列再次进行 GM(1,1)建模,并对下一步的沉降进行预测,由此实现对基坑沉降的滚动预测,直至完成预测目标为止。

3 基于 Markov 优化的 GM(1,1)模型

由式(8)可知,灰色 GM(1,1)模型对于符合指数发展规律的沉降曲线具有较好的适应性,而实际工程中基坑沉降变形存在一定的波动,因此采用该模型对基坑沉降变形进行预测时仍存在一定的误差。马尔科夫链理论描述的是状态空间中从一个

状态到另一个状态转变的随机过程,在对基坑沉降变形进行预测分析时,将灰色 GM(1,1)模型预测值与实际沉降之间的相对误差序列认为是一个随机过程,通过马尔科夫链对相对误差进行修正,进而对灰色 GM(1,1)模型的预测值进行修正。基于马尔科夫优化的灰色 GM(1,1)模型实现了二者的优势互补,对随机波动较大的沉降变形过程能进行更为准确地预测。基于马尔科夫链理论的优化步骤具体如下。

首先计算灰色 GM(1,1)模型预测的相对误差 ε,即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\hat{x}^{(0)} - x^{(0)}}{x^{(0)}} \tag{10}$$

根据相对误差序列的分布范围,将其分为 n 个状态区间,第 i 个状态区间记为 $S_i(i = 1,2,\cdots,n)$,对应的状态区间范围为 $[Q_{1i},Q_{2i}]$,根据相对误差序列与状态空间关系,确定状态转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix} \tag{11}$$

式(11)中:p_{ij} 表示由状态 S_i 转移到状态 S_j 的概率,其计算公式为

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i} \tag{12}$$

式(12)中:N_i 为状态 S_i 出现的次数;N_{ij} 为状态 S_i 转移到 S_j 的次数。

状态转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 表示的是系统中各状态转移到下一状态的概率。假设初始状态向量为 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$,则在经过 n 步转移后的状态向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_0 P^n \tag{13}$$

根据状态向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 即可确定 n 步转移后相对误差最有可能处于的状态区间。通常在实际预测时只考虑一步转移的情况,即式中 $n=1$;若当前状态处于 S_m 状态,则只需考虑转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的第 m 行,若 $\max\{P_{mj}\} = P_{mk}$,则下一步预测对象最有可能从 S_m 状态转向 S_k 状态,在确定下一步预测对象所处的状态区间后,即可得到修正后的沉降预测结果,即

$$\hat{x}^{(0)\prime}(k+1) = \hat{x}^{(0)}(k+1)/(1+\bar{\varepsilon}) \tag{14}$$

式(14)中:$\bar{\varepsilon}$ 为相对误差修正值,取为 S_k 状态区间范围的平均值,即

$$\bar{\varepsilon} = \frac{Q_{1k} + Q_{2k}}{2} \tag{15}$$

4 工程实例分析

福州火车北站南广场综合改造工程西楼位于福州市晋安区站前路与站西路路口北侧,拟建建筑物最大标高约为 100 m,地下 3 层。西楼基坑工程支撑体系为止水帷幕 + 支护桩 + 两道混凝土内支撑,基坑北、西、南三面均设有止水帷幕,东侧因毗邻地铁外墙未设止水帷幕,支护桩桩间止水为桩径为 800 mm 的高压旋喷桩。该工程周边道路交错,道路两侧多分布有地下电缆、煤气管道、污水管、给排水管等各种类型的地下管线;且周边建筑以老旧多层住宅为主,工程北侧支护桩与既有东浦花园居民小区距离仅 15 m,局部坑中坑开挖深度至 17.9 m,属于超过一定规模的危险性较大的分部分项工程,因此在基坑开挖过程中必须对周边建筑物地表沉降进行实时监测,从而保证施工过程中基坑的安全和稳定。

为了验证前文中所提出的沉降预测模型的合理性,并对不同模型的预测效果进行对比,选取基坑周边建筑物沉降观测数据进行分析,该基坑工程共布置监测点 19 个,编号分别为 M1 ~ M19,采用其中监测点 M4 累计 11 个月的原始观测数据进行建模,并对基坑周边建筑物沉降变形进行预测分析,原始监测数据如表 1 所示。

表 1 M4 监测点实测沉降

Table 1 Settlement datas of M4 monitoring point

序号	观测日期	累积沉降/mm
1	2017-08-05	6.33
2	2017-09-04	8.31
3	2017-10-04	8.56
4	2017-11-04	10.95
5	2017-12-04	10.72
6	2018-01-04	10.67
7	2018-02-04	13.13
8	2018-03-04	13.74
9	2018-04-04	14.63
10	2018-05-04	14.85
11	2018-06-04	14.95

选取表 1 中前 8 个月的沉降监测数据进行 GM(1,1)建模,根据第 2 节中的步骤得到 GM(1,1)模型参数 $a = -0.083$,$b = 7.4846$。将参数 a、b 代入式(8)中,得到模型预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 96.5059\mathrm{e}^{0.083k} + 90.1759 \tag{16}$$

为了建立新维 GM(1,1)预测模型,将新近的监测数据补充到原始数据列中,同时将原数据列中旧的观测数据剔除。具体步骤为将第 1 个月的观测数据剔除,使用第 2—9 月的观测数据作为原始数据列重新进行 GM(1,1)模型建模,从而对第 10 月的沉降进行预测。同样根据步骤得到新维 GM(1,1)模型中参数 $a = -0.0796$,$b = 8.1317$。将参数 a、b

代入式(8)中,得到模型预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 110.467\mathrm{e}^{0.0796k} + 102.157 \quad (17)$$

同理,对第11月的累积沉降进行预测时,使用第3—10月的观测数据作为原始数据列重新进行GM(1,1)模型建模,得到模型参数 $a=-0.064$、$b=9.495$。将参数 a、b 代入式(8)中,得到模型预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 156.9194\mathrm{e}^{0.064k} + 148.3594 \quad (18)$$

在采用马尔科夫链理论对GM(1,1)模型进行优化时,需要首先计算出GM(1,1)模型预测的相对误差,如表2所示。由表2可知,模型预测的相对误差范围为 $-9.96\% \sim 9.07\%$,因此分别以 -10%、-5%、0、5%、10% 为阈值,将其划分为 S_1、S_2、S_3、S_4 共4个状态区间,各状态区间范围分别为 $[-10\%, -5\%)$,$[-5\%, 0)$,$[0, 5\%)$,$[5\%, 10\%)$。由此可确定GM(1,1)模型预测相对误差所处的状态区间。

根据表2中各状态间的转换关系,采用第3节中步骤即可确定状态转移矩阵 $\boldsymbol{P}$。首先根据表2中状态区间的分布情况确定各状态出现的次数以及各状态间转移的次数,如表3所示;由于表2中最后一个时序的后续状态未知,即无法确定其向任一状态的转移概率,因此最后一个时序所处的状态区间不参与统计。

根据表3的统计结果,采用式(12)计算各状态转移概率,最终确定状态转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

表2 GM(1,1)模型预测值与实测值对比

Table 2 Comparison between measured value and predicted value by GM(1,1) model

序号	实测值/mm	预测值/mm	相对误差/%	状态区间
1	6.33	6.33	0	S3
2	8.31	8.35	0.5	S3
3	8.56	9.07	6.01	S4
4	10.95	9.86	-9.96	S1
5	10.72	10.71	-0.06	S2
6	10.67	11.64	9.09	S4
7	13.02	13.05	0.21	S3
8	13.74	13.75	0.09	S3

表3 马尔科夫状态转移统计结果

Table 3 Statistical results of Markov state transition

状态	S_1	S_2	S_3	S_4	合计
S_1	0	1	0	0	1
S_2	0	0	0	1	1
S_3	0	0	2	1	3
S_4	1	0	1	0	2
合计	1	1	3	2	7

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

根据马尔科夫链模型,第 n 步的状态概率向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由式(13)进行计算。由于第8月时处于 S_3 状态,因此确定初始状态概率向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (20)$$

将初始状态向量代入式(13)中,可计算得到一步转移后的状态概率向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{P} = [0 \quad 0 \quad 2/3 \quad 1/3] \quad (21)$$

由此可以得出第9月模型预测的相对误差最大可能处于 S_3 状态,此时采用式(14)对预测结果进行修正。由GM(1,1)模型可计算得出第9个月沉降预测值为14.95 mm,基于马尔科夫链理论的修正预测结果为

$$\hat{x}' = 14.95/[1 + 0.5(0 + 5\%)] = 14.56 \quad (22)$$

采用马尔科夫理论对新维GM(1,1)模型预测结果进行优化时,只需根据上述步骤对新维GM(1,1)模型预测的相对误差不断进行修正即可。如对第10月的沉降进行预测时,首先采用2~8个月的数据进行GM(1,1)建模,并根据模型预测相对误差的分布范围重新进行状态区间划分,确定状态转移矩阵 $\boldsymbol{P}$。根据上述步骤计算得到基于马尔科夫优化的新维GM(1,1)模型的预测结果。不同模型预测结果如表4所示。

从表4中可以看出,在对监测点M4的沉降变形进行预测时,传统GM(1,1)模型预测的平均相对误差为9.74%;新维GM(1,1)模型预测的平均相对误差为6.08%,表明考虑监测数据时效性的新维GM(1,1)模型能更为准确地对基坑沉降进行预测;而基于马尔科夫优化的新维GM(1,1)模型的平均相对误差最小,仅为1.64%,与GM(1,1)模型和新维GM(1,1)模型相比,基于马尔科夫优化的GM(1,1)模型的预测值与实测值最为接近。由此可见,基于马尔科夫链理论的优化方法能很好地弥

表4 不同预测模型预测结果对比

Table 4 Comparison of prediction results by different models

时序	实测值/mm	GM(1,1)模型		新维GM(1,1)模型		新维GM(1,1)-马尔科夫模型	
		预测值/mm	相对误差/%	预测值/mm	相对误差/%	预测值/mm	相对误差/%
9	14.63	14.95	2.06	14.93	2.06	14.56	-0.43
10	14.85	16.22	9.25	15.98	7.59	14.86	0.09
11	14.95	17.63	17.91	16.23	8.58	15.61	4.41
平均值			9.74		6.08		1.64

补传统 GM(1,1)模型的缺陷,从而明显地提高模型的预测精度。

5 结论

(1)考虑监测数据的时效性对 GM(1,1)模型预测结果的影响,基于新陈代谢的思想,通过对原始沉降数据列中的观测数据进行不断更新,建立了新维 GM(1,1)预测模型。

(2)采用马尔科夫链理论对 GM(1,1)模型进行优化,根据 GM(1,1)模型预测时所产生的相对误差的范围,对其所处的状态区间进行合理划分,并确定了对应的状态转移概率矩阵,由此建立了基于马尔科夫优化的 GM(1,1)模型。

(3)通过工程实例对 3 种沉降预测模型的预测效果进行分析,结果表明:与传统 GM(1,1)模型相比,新维 GM(1,1)模型和基于马尔科夫优化的 GM(1,1)模型预测的平均相对误差均明显降低,其中基于马尔科夫优化的 GM(1,1)模型的平均相对误差最小,表明基于马尔科夫链理论的优化方法能明显地提高 GM(1,1)模型的预测精度。

参 考 文 献

1 奚家米, 付　磊. 基于时空效应的深基坑工程变形规律分析[J]. 科学技术与工程, 2019, 19 (16): 290-298.
Xi Jiami, Fu Lei. Analysis of deformation law of deep foundation pit based on space-time effect[J]. Science Technology and Engineering, 2019, 19(16): 290-298.

2 王聪淼, 余湘娟, 高　磊. 考虑不同软基处理方式下路基沉降预测模型对比分析[J]. 科学技术与工程, 2016, 14(5): 151-155.
Wang Congyan, Yu Xiangjuan, Gao Lei. Comparative analysis on settlement prediction methods considering different soft ground treatments[J]. Science Technology and Engineering, 2016, 14(5): 151-155.

3 黄广军. Asaoka 法预测软土地基沉降时存在的问题和对策[J]. 岩土力学, 2016, 37(4): 1061-1067.
Huang Guangjun. Problems and their solutions in predicting soft ground settlement based on Asaoka's method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(4): 1061-1067.

4 钟国强, 王　浩, 李　莉, 等. 基于 SFLA-GRNN 模型的基坑地表最大沉降预测[J]. 岩土力学, 2019, 40(2): 792-800.
Zhong Guoqiang, Wang Hao, Li Li, et al. Prediction of maximum settlement of foundation pit based on SFLA-GRNN model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(2): 792-800.

5 彭立顺, 蔡　润, 刘进波, 等. 基于遗传优化神经网络的高速公路路基沉降量预测[J]. 地震工程学报, 2019, 41(1): 124-130.
Peng Lishun, Cai Run, Liu Jinbo, et al. Settlement prediction of highway subgrades based on genetic optimization neural network[J]. China Earthquake Engineering Journal, 2019, 41(1): 124-130.

6 张玉芝, 杜彦良, 孙宝臣. 改进的动态灰色模型在高铁路基变形预测中的应用[J]. 铁道科学与工程学报, 2013, 10(2): 56-62.
Zhang Yuzhi, Du Yanliang, Sun Baochen. Application of improved dynamic grey model in high-speed railway bed settlement prediction [J]. Journal of Raiway Science and Engineering, 2013, 10(2): 56-62.

7 赖文杰, 齐昌广, 郑金辉, 等. 含分数阶的灰色模型及其在地基沉降预测中的应用[J]. 水文地质工程地质, 2019, 46(3): 124-129.
Lai Wenjie, Qi Changguang, Zheng Jinhui, et al. Gray model with fractional order and its application to settlement prediction[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2019, 46(3): 124-129.

8 张云鹏, 李利平, 贺　鹏, 等. 隧道围岩大变形高斯过程回归预测模型及工程应用[J]. 科学技术与工程, 2018, 18(1): 122-127.
Zhang Yunpeng, Li Liping, He Peng, et al. Gaussian process regression prediction model for the big deformation of the tunnel rock and its application[J]. Science Technology and Engineering, 2018, 18(1): 122-127.

9 李小刚, 张廷会. GM(1, 1)灰色预测模型在道路软基沉降预测中的影响[J]. 铁道科学与工程学报, 2016, 13(1): 63-69.
Li Xiaogang, Zhang Tinghui. Application of the GM (1, 1) gray prediction model in the road soft foundation settlement prediction[J]. Journal of Raiway Science and Engineering, 2016, 13(1): 63-69.

10 刘寒冰, 向一鸣, 阮有兴. 背景值优化的多变量灰色模型在路基沉降预测中的影响[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 173-182.
Liu Hanbing, Xiang Yiming, Ruan Youxing. A multivariable grey model based on background value optimization and its application to subgrade settlement prediction [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(1): 173-182.

11 张　闯, 彭振斌, 彭文祥. 优化的灰色离散 Verhulst 模型在基坑沉降预测中的影响[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2017, 48(11): 3030-3037.
Zhang Chuang, Peng Zhenbin, Peng Wenxiang. Application of optimized grey discrete Verhulst model in settlement prediction of foundation pit[J]. Journal of Central South Univerity (Science and Technology), 2017, 48(11): 3030-3037.

12 傅家俊, 尹　泉, 傅鹤林, 等. 基于优化的灰色离散 Verhulst 新陈代谢模型的基坑沉降预测[J]. 公路工程, 2019, 44(2): 19-23.
Fu Jiajun, Yin Quan, Fu Helin, et al. Settlement prediction of foundation pit based on optimized grey discrete verhulst metabolic model[J]. Highway Engineering, 2019, 44(2): 19-23.

13 何亚伯, 梁　城. 非等距时间序列模型在隧道拱顶位移预测中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(S1): 4096-4102.
He Yabo, Liang Cheng. A non-equidistant time series model and its application in tunnel vault crown displacement prediction[J]. Chinese Journal of Rockl Mechanics and Engineering, 2014, 33(S1): 4096-4102.

14 唐　葭, 刘　霁, 蒋建清. 基于非等时距预测模型的填土路基沉降量分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2014, 45(6): 2054-2062.
Tang Jia, Liu Ji, Jiang Jianqing. Fill subgrade settlement analysis based on prediction model of non isometric[J]. Journal of Central South Univerity (Science and Technology), 2014, 45(6): 2054-2062.

15 芮海田, 吴群琪, 袁华智, 等. 基于指数平滑法和马尔科夫模型的公路客运量预测方法[J]. 交通运输工程学报, 2013, 13(4): 87-94.

Rui Haitian, Wu Qunqi, Yuan Huazhi, et al. Prediction method of highway passenger transportation volume based on exponential smoothing method and Markov model[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2013, 13(4): 87-94.

16 万 臣, 李建峰, 赵 勇, 等. 基于新维 BP 神经网络-马尔科夫链模型的大坝沉降预测[J]. 长江科学院院报, 2015, 32(10): 23-27.

Wan Chen, Li Jianfeng, Zhao Yong, et al. Prediction of dam settlement using metabolism BP neural network and Markov chain[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Insititute, 2015, 32(10): 23-27.

17 曹文贵, 印 鹏, 贺 敏, 等. 基于数据新旧程度和预测取值区间调整的沉降组合预测方法[J]. 岩土力学, 2017, 37(2): 534-540.

Cao Wengui, Yin Peng, He Min, et al. A combination method for predicting settlement based on new or old degree of data and adjustment of value interval of prediction[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 37(2): 534-540.