



引用格式:李辰,付有兵,张生,等.油气悬架系统刚度等效线性化及振动位移概率分布计算[J].科学技术与工程,2020,20(23):9622-9626

Li Chen, Fu Youbing, Zhang Sheng, et al. Equivalent linearization and vibration displacement probability distribution of hydraulic-pneumatic suspension system stiffness calculation [J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(23): 9622-9626

# 油气悬架系统刚度等效线性化及振动位移概率分布计算

李辰,付有兵,张生,吴学雷  
(北京航天发射技术研究所,北京100076)

**摘要** 针对油气悬架刚度的非线性特性,采用统计线性化的方法,对其弹性力进行了线性化等效。并以车辆二自由度振动系统模型为基础,得到了悬架系统振动位移的响应特性及概率分布,以此提出了悬架系统限位装置高度的设计依据及计算方法。仿真结果表明,提出的设计依据以及计算方法具有较高的准确性,具有工程应用价值,能够为实际油气悬架限位设计提供理论依据。

**关键词** 油气悬架;等效线性化;概率分布;限位设计

**中图法分类号** U463.33; **文献标志码** A

## Equivalent Linearization and Vibration Displacement Probability Distribution of Hydraulic-pneumatic Suspension System Stiffness Calculation

LI Chen, FU You-bing, ZHANG Sheng, WU Xue-lei  
(Beijing Institute of Space Launch Technology, Beijing 100076, China)

**[Abstract]** For the nonlinear characteristics of Hydraulic-Pneumatic suspension system stiffness, the linearization of its elastic force was equivalent by statistical linearization methods. Based on the 2-DOF vehicle model, the response characteristics and probability distribution of the suspension system vibration displacement were obtained. In that way, the design basis and calculation method of the suspension system height limit were proposed. The simulation results show that the design basis and calculation method have high accuracy and engineering application value, which can provide theoretical basis for the actual height limit design of hydraulic-pneumatic suspension.

**[Key words]** hydraulic-pneumatic suspension; equivalent linearization; probability distribution; limit design

油气悬架的非线性刚度特性能够满足车辆的平顺性要求,并同时提高车辆的越野速度,发挥其机动性能。因为其相对于普通悬架系统具有一些不可比拟的优势,使得油气悬架在重型车辆、军用特种车辆、工程机械等车辆上得到了广泛应用,用以提高车辆的舒适性及操纵稳定性等性能<sup>[1-4]</sup>。

目前众多学者对油气悬架进行了大量研究。张迪等<sup>[5]</sup>以单气室油气悬架为基础,建立了考虑多种影响因素的油气悬架非线性数学模型,并得到了弹性力和阻尼力表达式;程祥瑞等<sup>[6]</sup>建立了油气弹簧弹性、刚度、频率特性数学模型,并对主要因素进行了全面分析;陈林山<sup>[7]</sup>搭建了油气悬架非线性模型,并分析了悬架缸各腔面积、初始充气体积、阻尼孔和单向阀过流面积等对悬架性能的影响特点;吕

宝占等<sup>[8-9]</sup>利用仿真实验平台研究得到了阻尼阀阀芯转角、初始充气体积、激振频率和幅值等参数对针对特性的影响趋势,后续又在阻尼可调油气悬架数学模型基础上,对农用车辆油气悬架刚度特性进行了研究;王旭等<sup>[10]</sup>基于建立的互连油气悬架系统模型,对比分析了不同工况下互连油气悬架与独立悬架的刚度、阻尼特性,并对互连悬架阻尼特性进行了参数化分析,得到了各参数对悬架刚度和阻尼特性的影响特点。

针对油气悬架的研究主要集中两方面:①基于不同油气悬架方案,建立悬架系统的非线性理论模型;②利用仿真或试验等方法分析各参数对悬架刚度、阻尼特性、平顺性等性能的影响规律。而采用统计线性化方法对油气悬架特性进行的研究较少,

且现有研究具有一定局限性。因此,将针对油气悬架刚度的非线性特性,采用统计线性化方法,对其弹性力进行线性化等效,从而得到悬架系统振动位移响应特性及概率分布特点,为悬架系统限位装置高度设计提供理论依据。

在路面激励下,车辆悬架系统响应为一随机振动过程。随机振动与确定性振动最大区别为,振动结果分布具有随机性;但从大量振动结果分析,随机振动又服从一定的统计规律。因此,悬架系统振动响应可借助概率论与数理统计方法进行描述以及概率统计计算<sup>[11]</sup>。

## 1 油气悬架非线性弹性力解析

油气悬架由蓄能器内气体压缩而产生相应弹性力,故其刚度具有明显的非线性特性。若不考虑大气压强的影响,以静平衡位置为系统原点,则油气悬架弹性力可以描述为

$$F = F_s \left( \frac{P_0 V_0}{P_0 V_0 - F_s x} \right)^\gamma - F_s \quad (1)$$

式(1)中: $F_s$  为静平衡位置油气悬架输出力; $P_0$  为预充气压力; $V_0$  为蓄能器有效容积; $x$  为油气悬架位移行程,压缩行程为正,伸张行程为负; $\gamma$  为气体多变指数。

利用麦克劳林公式将式(1)进行展开,展开后的表述形式为

$$\begin{aligned} F(x) = & \frac{\gamma F_s^2}{P_0 V_0} x + \frac{\gamma(\gamma+1) F_s^3}{(2!) (P_0 V_0)^2} x^2 + \cdots + \\ & \frac{[\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)] F_s^{n+1}}{(n!) (P_0 V_0)^n} x^n + R_n(x) \end{aligned} \quad (2)$$

其拉格朗日余项的表述形式为

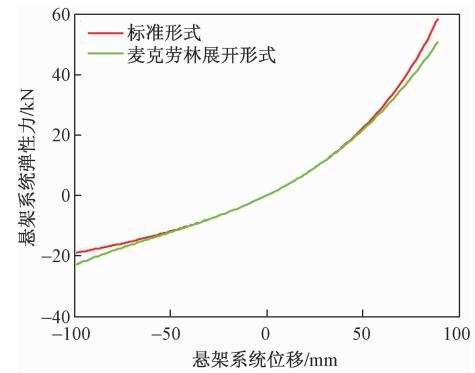
$$R_n(x) = \frac{[\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)] F_s^{n+2} (P_0 V_0)^\gamma}{(n+1)! (P_0 V_0 - F_s \zeta)^{\gamma+n+1}} x^{n+1} \quad (3)$$

取弹性力麦克劳林展开表达式的前3项,即可得到其简洁的高精度近似表述形式<sup>[12]</sup>:

$$\begin{aligned} F(x) = & \frac{\gamma F_s^2}{P_0 V_0} x + \frac{\gamma(\gamma+1) F_s^3}{2(P_0 V_0)^2} x^2 + \\ & \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) F_s^4}{6(P_0 V_0)^3} x^3 \end{aligned} \quad (4)$$

以某型号车辆悬架系统为例,绘制其弹性力曲线如图1所示。

由图1可知,经麦克劳林展开后的油气悬架弹性力表述形式具有较高的精度,特别在静平衡位置及常用位移范围内,与标准形式得到的弹性力高度吻合。因此,可以利用式(4)作为油气悬架弹性力



注:压缩行程悬架系统位移为正,伸张行程悬架系统位移为负

图1 油气悬架弹性力曲线

Fig. 1 Hydraulic-pneumatic suspension elastic force curve

的计算公式。

## 2 油气悬架弹性力等效线性化计算

取油气悬架弹性力的等效线性化表述形式为

$$F^*(x) = k_{eq}(x - \mu) + b_{eq} \quad (5)$$

式(5)中: $k_{eq}$ 、 $b_{eq}$  为弹性化系数; $\mu$  为悬架振动位移响应特性期望。则等效线性化弹性力与非线性弹性力的偏差为

$$\Delta F(x) = k_{eq}(x - \mu) + b_{eq} - F(x) \quad (6)$$

以等效线性化弹性力与非线性弹性力偏差平方值的数学期望最小,作为统计线性化的依据,即需满足如下数学条件:

$$\frac{dE[\Delta F^2(x)]}{dk_{eq}} = \frac{dE[\Delta F^2(x)]}{db_{eq}} = 0 \quad (7)$$

由于油气悬架振动位移量近似服从于正态分布(高斯分布)<sup>[13-15]</sup>,根据概率统计的相关理论可得:

$$\begin{cases} k_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) F(x) p(x) dx}{\sigma^2} \\ b_{eq} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p(x) dx \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中: $\sigma$  为标准差。

将式(4)代入式(8)中,可得到弹性力线性化系数的表述形式为

$$\begin{cases} k_{eq} = \frac{\gamma F_s^2}{P_0 V_0} + \frac{\gamma(\gamma+1) F_s^3}{(P_0 V_0)^2} \mu + \\ \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) F_s^4}{2(P_0 V_0)^3} (\mu^2 + \sigma^2) \\ b_{eq} = \frac{\gamma F_s^2}{P_0 V_0} \mu + \frac{\gamma(\gamma+1) F_s^3}{2(P_0 V_0)^2} (\mu^2 + \sigma^2) + \\ \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) F_s^4}{6(P_0 V_0)^3} (\mu^3 + 3\mu\sigma^2) \end{cases} \quad (9)$$

### 3 二自由度振动系统响应

建立经典的二自由度振动系统模型<sup>[16]</sup>,如图2所示。图2中, $m_1$ 为非簧载质量; $m_2$ 为簧载质量; $K$ 为悬架系统刚度; $C$ 为悬架系统阻尼; $z_1$ 为非簧载质量振动位移; $z_2$ 为簧载质量振动位移; $q$ 为路面激励。

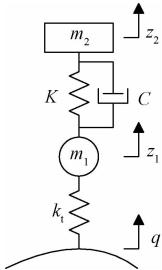


图2 二自由度振动系统模型

Fig. 2 2-DOF vibration system model

根据振动理论,取悬架振动位移 $z_3 = z_1 - z_2$ 以及簧载质量振动位移 $z_2$ 为广义坐标,得到其运动微分方程为

$$\begin{cases} m_2 \ddot{z}_2 - C \dot{z}_3 - F_k = 0 \\ m_1 (\ddot{z}_2 + \ddot{z}_3) + C \dot{z}_3 + F_k + k_t (z_2 + z_3 - q) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

式(10)中: $F_k$ 为悬架系统弹性力。

将式(5)代入式(10)中,由于系统激励为平稳随机过程,且响应也已达到平稳状态,则根据平稳随机过程互相关函数的性质<sup>[17]</sup>,可以进一步得到 $b_{eq} = 0$ 。则式(10)可以重新表述为

$$\begin{cases} m_2 \ddot{z}_{30} - C \dot{z}_{30} - k_{eq} z_{30} = 0 \\ m_1 (\ddot{z}_{20} + \ddot{z}_{30}) + C \dot{z}_{30} + k_{eq} z_{30} + k_t (z_{20} + z_{30} - q) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

式(11)中: $z_{30} = z_3 - \mu$ , $z_{20} = z_2 + \mu$ 。

系统响应 $z_{30}$ 对于路面激励输入 $q$ 的频率响应函数为

$$H(j\omega)_{z_{30} \sim q} = \frac{m_2 \omega^2 k_t}{A} \quad (12)$$

式(12)中: $A = -\omega^4 m_1 m_2 + j\omega^3 C(m_1 + m_2) + \omega^2 (k_{eq} m_1 + k_{eq} m_2 + k_t m_2) - j\omega C k_t - k_t k_{eq}$ 。

由于振动响应量 $z_{30}$ 的均值为0。因此,其方差等于均方值,可以由其功率谱密度对频率积分求得:

$$\sigma_{z_{30}}^2 = \sigma_{z_3}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|_{z_{30} \sim q}^2 G_q(\omega) d\omega = \pi G_q(n_0) n_0^2 u \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|_{z_{30} \sim q}^2 \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 d\omega \quad (13)$$

式(13)中: $u$ 为车速; $n_0$ 为参考空间频率,0.1 m<sup>-1</sup>;  $G_q(n_0)$ 为路面不平度系数。

根据积分公式<sup>[18]</sup>,可将式(13)进行求解,得到悬架振动位移方差的最终表述形式为

$$\sigma_{z_3}^2 = \frac{\pi^2 G_q(n_0) n_0^2 u (m_1 + m_2)}{C} \quad (14)$$

联立式(9)、式(14)及 $b_{eq} = 0$ ,即可求得悬架振动位移期望以及弹性力线性化系数(线性化刚度),并进一步得到油气悬架弹性力的等效线性化表述形式。

### 4 悬架系统振动位移概率分布

由于等效线性化悬架系统振动位移量近似服从于正态分布,则可以将其记作: $z_3 \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。根据概率理论,其概率分布密度函数的表达式为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (15)$$

悬架系统振动位移 $z_3$ 位于 $[x_1, x_2]$ 区间内的概率为

$$P = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (16)$$

悬架系统振动位移位于 $\mu \pm \lambda\sigma$ 范围内的概率 $P$ 如表1所示。

表1 悬架系统振动位移位于 $\mu \pm \lambda\sigma$ 范围内的概率

Table 1 Probability that the vibration displacement of the suspension system is within the range of  $\mu \pm \lambda\sigma$

$\lambda$	1	2	2.58	3	3.29
$P/\%$	68.3	95.4	99	99.7	99.9
$(1-P)/\%$	31.7	4.6	1	0.3	0.1

### 5 模型正确性验证

将某型号车辆作为目标车辆进行分析计算,相关仿真参数如表2所示。

表2 仿真参数

Table 2 Simulation parameter

参数名称	参数值
簧载质量 $m_2/\text{kg}$	4 400
非簧载质量 $m_1/\text{kg}$	600
预充气压力 $P_0/\text{MPa}$	3.0
蓄能器有效容积 $V_0/\text{L}$	2.8
悬架系统等效线性阻尼 $C/[\text{N} \cdot (\text{s} \cdot \text{m}^{-1})]$	9 703.75
轮胎等效线性刚度 $k_t/(\text{N} \cdot \text{mm}^{-1})$	1 173

以D级路面、60 km/h车速为例,计算得到:悬架振动位移期望为-5.032 9 mm,悬架振动位移标准差为29.460 5 mm,线性化刚度为321.130 3 N/mm。

同时,利用标准形式非线性系统数值仿真方法,建立二自由度振动系统仿真模型。其中,路面模型基于文献[19]中所建立的基于有理函数的路面不平度时域模型,如图3所示。

仿真过程中,采用定步长ode4(Runge-Kutta)法

进行数值求解,采样时间为10 ms,仿真时间为50 000 s,共产生数据量5 000 001个,保证了数据量的足够大,确保统计结果的有效性。

针对悬架系统振动位移的概率分布密度,将标准形式非线性系统数值仿真计算结果与等效线性化系统解析计算结果进行对比,如图4所示。

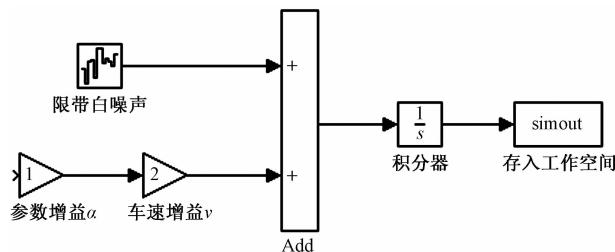


图3 路面不平度时域Simulink模型

Fig. 3 Simulink model of the time domain of road roughness

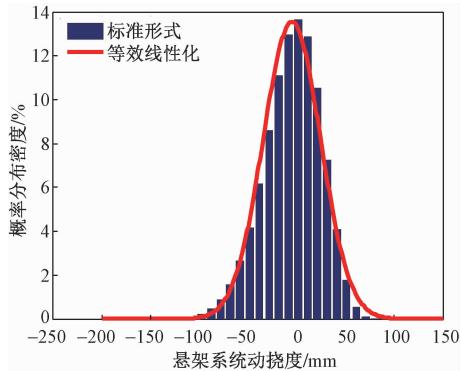


图4 悬架系统振动位移概率分布密度

Fig. 4 Suspension system vibration displacement probability distribution density

由图4可知,采用等效线性化系统得到的悬架系统振动位移概率分布密度与标准形式非线性系统数值仿真计算结果基本一致,可以证明等效线性化系统模型及系统响应特性的有效性和正确性。

## 6 油气悬架系统限位行程设计

根据表2中的参数值,计算得到不同车速、不同路面下,悬架振动位移响应特性及线性化刚度,如表3所示。

由表3中的数据可知,随着车速增加以及行驶路面条件的恶化,悬架振动位移响应特性的期望与方差均会增大,表明其振动运动的动平衡原点将会远离静平衡位置,且其离散性情况加大。同时,悬架系统等效刚度也随之增加。

悬架系统限位行程设计时,若仅从车辆平顺性角度考虑,则要求悬架系统具有足够的动挠度,以防止在恶劣路面行驶时频繁撞击限位块。但这将增大限位行程,使车辆重心高度增加,而重心升

高将对车辆其他性能产生不利影响;同时,还会增大结构件应力,严重时会破坏结构,产生安全隐患。因此,限位行程应在平顺性许可条件下取最小值<sup>[16,20]</sup>。

表3 等效线性化系统特性

Table 3 Equivalent linearization system characteristics

路面 等级	车速/ (km·h <sup>-1</sup> )	悬架振动位移响应特性/mm		线性化刚度 $k_{eq}/(N\cdot mm^{-1})$
		期望	标准差	
B 级 路面	20	-0.1114	4.2523	310.7007
	30	-0.1669	5.2079	310.7908
	40	-0.2224	6.0136	310.8814
	50	-0.2779	6.7234	310.9725
	60	-0.3332	7.3651	311.0641
	70	-0.3885	7.9552	311.1561
	80	-0.4437	8.5045	311.2486
	20	-0.4437	8.5045	311.2486
C 级 路面	30	-0.6639	10.4158	311.6234
	40	-0.8830	12.0272	312.0055
	50	-1.1009	13.4468	312.3951
	60	-1.3178	14.7302	312.7921
	70	-1.5335	15.9105	313.1963
	80	-1.7481	17.0090	313.6078
	20	-1.7481	17.0090	313.6078
	30	-2.5955	20.8317	315.3250
D 级 路面	40	-3.4253	24.0544	317.1535
	50	-4.2377	26.8936	319.0898
	60	-5.0329	29.4605	321.1303
	20	-6.5726	34.0180	325.5099
	30	-9.4563	41.6634	335.3692
	40	-12.0944	48.1087	346.5250
	50	-14.5062	53.7872	358.7915
	60	-16.7115	58.9209	372.0055
E 级 路面	20	-20.5791	68.0360	400.7320
	30	-26.6030	83.3267	464.5971
	40	-31.0140	96.2174	533.6327
	20	-20.5791	68.0360	400.7320

若以D级路面、60 km/h车速工况为设计条件,要求此行驶工况下悬架撞击限位装置概率不超过0.3%,则限位装置的设计高度应为 $(-5.0329 \pm 3) \times 29.4605 = -93.4144 \sim 83.3486$  mm,即车轮上跳限位高度为83 mm,车轮下跳限位高度为93 mm,可以满足上述设计要求。

## 7 结论

(1)针对油气悬架弹性力的非线性特性,采用统计线性化方法,根据油气悬架振动位移量近似服从于正态分布的特性,对其进行了线性化等效,得到了油气悬架弹性力的等效线性化表述形式。

(2)以车辆二自由度振动系统模型为基础,利用等效线性化弹性力的表述形式,得到了悬架系统振动位移的响应特性及其概率分布。

(3)利用标准形式的非线性弹性力表述形式,

在二自由度振动系统模型中计算得到的悬架系统振动位移概率分布密度,与等效线性化弹性力的解析计算结果基本一致,证明了建立的等效线性化系统模型以及系统响应特性的正确性。

(4)根据悬架系统振动位移响应特性的概率分布特征,提出了悬架系统限位装置高度设计的依据以及计算方法。

## 参 考 文 献

- 1 李春艳,谢东升,陈铁杰,等.论油气悬挂的性能特点及研究现状[J].机械制造,2008(10):59-62.  
Li Chunyan, Xie Dongsheng, Chen Yijie, et al. Performance characteristics and research status of hydraulic-pneumatic suspension [J]. Machinery, 2008(10): 59-62.
- 2 舒红宇,古永祺.油气悬架的研究和应用[C]//四川省汽车工程学会第一届二次年会论文集.成都:四川省汽车工程学会,1991.  
Shu Hongyu, Gu Yongqi. Research and application on hydraulic-pneumatic suspension [A]//Papers Collection of The Second Session of Society of Automotive Engineers of Sichuan 1st Annual Conference. Chengdu: Society of Automotive Engineers of Sichuan, 1991.
- 3 孙建民.油气悬架的应用及关键技术评述[J].煤矿机械,2007,28(4):8-11.  
Sun Jianmin. Applications and key technologies of hydro-pneumatic suspension [J]. Coal Mine Machinery, 2007, 28(4): 8-11.
- 4 秦家升,安静,单海燕,等.油气悬架的特征及其结构原理分析[J].工程机械,2003(11):7-10.  
Qin Jiasheng, An Jing, Shan Haiyan, et al. Features of oil-air suspension and analysis of its structure principle [J]. Construction Machinery and Equipment, 2003(11): 7-10.
- 5 张迪,田晋跃.自卸车油气悬架特性仿真与平顺性研究[J].重庆理工大学学报(自然科学版),2017,31(9):45-52.  
Zhang Di, Tian Jinyue. Research on the characteristics and ride comfort of dump truck's hydro-pneumatic suspension [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science Edition), 2017, 31(9): 45-52.
- 6 程祥瑞,高钦和,刘志浩,等.单气室油气弹簧刚度及频率特性仿真分析[J].计算机仿真,2016,33(11):120-124.  
Cheng Xiangrui, Gao Qinhe, Liu Zhihao, et al. Research on characteristics of single chamber hydro-pneumatic spring [J]. Computer Simulation, 2016, 33(11): 120-124.
- 7 陈林山.基于Simulink油气悬架非线性特性影响因素分析[J].机床与液压,2017,45(19):179-184.  
Chen Linshan. Analysis on influence factors of nonlinear characteristics of hydro-pneumatic suspension based on Simulink [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2017, 45(19): 179-184.
- 8 吕宝占,周慧英,胡爱军,等.非公路车辆油气悬架振动特性的台架试验[J].机床与液压,2017,45(19):8-12.  
Lü Baozhan, Zhou Huiying, Hu Aijun, et al. Bench test of vibration characteristics of off-road vehicle hydro-pneumatic suspension [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2017, 45(19): 8-12.
- 9 吕宝占,王爽,胡爱军,等.农用车辆阻尼可调油气悬架的刚度特性分析与试验[J].江苏农业科学,2018,46(1):154-157.  
Lü Baozhan, Wang Shuang, Hu Aijun, et al. Analysis and test of stiffness characteristics of hydro-pneumatic suspension with adjustable damping for agricultural vehicles [J]. Jiangsu Agricultural Sciences, 2018, 46(1): 154-157.
- 10 王旭,高钦和,刘志浩,等.重型多轴车辆互连油气悬架特性分析[J].液压与气动,2018(5):32-40.  
Wang Xu, Gao Qinhe, Liu Zhihao, et al. Characteristics analysis of interconnected hydro-pneumatic suspension for heavy multi-axle vehicle [J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2018(5): 32-40.
- 11 吕士宝.车辆随机振动响应分析与计算[D].兰州:兰州交通大学,2013.  
Lü Shibao. Analysis and calculation of vehicle's random vibration response [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2013.
- 12 曹树平,易孟林,罗晓玉.油气悬架非线性刚度模型的统计线性化分析[J].华中科技大学学报(自然科学版),2002,30(6):10-12.  
Cao Shuping, Yi Menglin, Luo Xiaoyu. Statistic linearization analysis of the nonlinear stiffness model for hydro-pneumatic suspensions [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2002, 30(6): 10-12.
- 13 曾荣兵,董明明,张振华,等.非线性油气悬架的阻尼特性研究[J].车辆与动力技术,2014(2):24-28.  
Zeng Rongbing, Dong Mingming, Zhang Zhenhua, et al. Damping characteristics of nonlinear hydro-pneumatic suspension [J]. Vehicle & Power Technology, 2014(2): 24-28.
- 14 董明明,骆振兴,姜宏,等.二自由度油气悬架统计线性化参数研究[J].北京理工大学学报,2014,34(4):349-352.  
Dong Mingming, Luo Zhenxing, Jiang Hong, et al. Hydro pneumatic suspension analysis with statistical linearization [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2014, 34(4): 349-352.
- 15 Robert J. B. Nonlinear analysis of slow drift oscillations of moored vessels in random seas [J]. Journal of Ship Research, 1981, 25(2): 130-140.
- 16 余志生.汽车理论[M].5版.北京:机械工业出版社,2009.  
Yu Zhisheng. Automotive theory [M]. 5th ed. Beijing: China Machine Press, 2009.
- 17 李惠彬.振动理论与工程应用[M].北京:北京理工大学出版社,2006.  
Li Huibin. Vibration theory and engineering application [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2006.
- 18 星谷胜.随机振动分析[M].北京:地震出版社,1977.  
Xing Gusheng. Random vibration analysis [M]. Beijing: Seismological Press, 1977.
- 19 吴志成,陈思忠,杨林,等.基于有理函数的路面不平度时域模型研究[J].北京理工大学学报,2009,29(9):795-798.  
Wu Zhicheng, Chen Sizhong, Yang Lin, et al. Model of road roughness in time domain based on rational function [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2009, 29(9): 795-798.
- 20 孙方宁,方传流,冯振东,等.汽车悬架非线性系统的响应分析[J].吉林工业大学学报,1988(3):46-58.  
Sun Fangning, Fang Chuanliu, Feng Zhendong, et al. The response analysis on nonlinear suspension system of vehicle [J]. Journal of Jilin University of Technology, 1988(3): 46-58.