第19卷　第35期　2019年12月
1671—1815(2019)0035-0028-06

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 19　No. 35　Dec. 2019
© 2019　Sci. Tech. Engrg.

引用格式：鲍乐平，黄　璞. 时滞分布参数切换系统的 H_∞ 控制[J]. 科学技术与工程，2019，19(35)：28-33

Bao Leping，Huang Pu. H_∞ control for distributed parameter switched systems with time delay[J]. Science Technology and Engineering，2019，19(35)：28-33

数　　学

时滞分布参数切换系统的 H_∞ 控制

鲍乐平[1]　黄　璞[2]

（太原工业学院自动化系[1]，太原 030008；东北大学信息科学与工程学院[2]，沈阳 100819）

摘　要　针对一类时滞分布参数切换系统的 H_∞ 控制问题进行了研究。通过构造适当的 Lyapunov 函数，结合 poincare 不等式、线性矩阵不等式(LMI)，给出了闭环系统渐近稳定的充分条件并设计了 H_∞ 状态反馈控制器和切换规则。和已有的分布参数系统的结果比较，考虑了分布参数系统中拉普拉斯算子的系数对系统性能的影响。所得结果是已有时滞分布参数系统 H_∞ 控制结论的推广。最后通过数值例子说明该设计方法的有效性。

关键词　切换系统　分布参数系统　时滞　Lyapunov 函数　渐近稳定　H_∞ 控制

中图法分类号　O231.4；　　**文献标志码**　A

切换系统在工程实践中有着广泛的应用，例如在机器人控制[1]、交通控制[2,3]、电力系统控制[4]等等。切换系统是一类重要的混杂系统，它包括一组子系统和一个描述子系统之间如何切换的切换规则，整个切换系统的进展情况受控于切换规则。这条规则也称为切换律、切换信号或切换函数。它决定子系统间如何切换[5,6]。

当切换系统的子系统用偏微分方程建模时，称之为分布参数切换系统。相比较利用常微分方程建模的集中参数切换系统，分布参数切换系统的控制对象变得更复杂，能更有效地提高控制的精度和速度。近十多年来，分布参数切换系统得到了广泛的关注[7—12]，已经成为混杂系统研究领域的前沿课题。由于分布参数切换系统具有无穷自由度，使得分布参数切换系统的研究有一定难度，有关分布参数切换系统的研究是目前国际控制理论研究领域的难点。

此外，时滞是使系统产生不稳定的因素。时滞加上切换，会导致更复杂的动力学行为[13,14]。

近年来，很多学者在与本研究相关的工作中取得了一定的成果。在切换系统方面，文献［13，14］研究了时滞切换系统的稳定性及 L_2 增益问题，但考虑的切换系统不是分布参数建模；在分布参数系统中，文献［15，16］利用线性矩阵不等式(LMI)研究了时滞分布参数系统稳定性及镇定性问题。文献［17］利用 LMI 时滞分布参数系统的 H_∞ 问题，但没有涉及切换。关于分布参数切换系统的研究，文献［8］利用 LMI 研究了时滞分布参数切换系统的鲁棒性问题。文献［10］研究了一类非线性分布参数切换系统的稳定性问题。文献［18］研究了分布参数切换系统的 H_∞ 问题，但没有涉及时滞问题。从相关的研究来看，对于时滞分布参数切换系统 H_∞ 问题研究，目前还不多见。

在上述研究工作的基础上，现针对一类时滞分布参数切换系统，研究其闭环系统渐进稳定及 H_∞ 控制综合问题。通过构造适当的 Lyapunov 函数，结合 Poincare 不等式和 LMI，给出闭环系统渐近稳定的充分条件并设计状态反馈控制器和切换规则。所设计的控制器既能确保闭环系统的稳定性，又使系统具有一定的 H_∞ 性能指标。本文首次研究切换时滞分布参数系统 H_∞ 控制问题，和已有分布参数系统结果比较[8,16,17,19]，考虑了分布参数系统中拉普拉斯算子的系数 $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 对系统性能的影响。而上述论文没有考虑拉普拉斯算子系数 Δ 的影响。

1　问题描述和准备工作

考虑时滞分布参数切换系统：

2019年3月13日收到　　国家自然科学基金(11661020，61673169)和国家留学基金(201808140223)资助

第一作者简介：鲍乐平，女，博士，副教授。研究方向：分布参数切换系统、机器人控制系统及非线性系统控制理论。E-mail：jsll68@126.com。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{W}(x,t)}{\partial t}=\boldsymbol{D}_i\Delta\boldsymbol{W}(x,t)+\boldsymbol{A}_{0i}\boldsymbol{W}(x,t)+\\ \quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{W}(x,t-r)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{U}(x,t)+\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{\omega}(x,t)\\ \boldsymbol{Z}(x,t)=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{W}(x,t)\end{cases}\tag{1}$$

状态反馈控制律:

$$\boldsymbol{U}(x,t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{W}(x,t)\tag{2}$$

把式(2)代入式(1)得到闭环时滞分布参数切换系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{W}(x,t)}{\partial t}=\boldsymbol{D}_i\Delta\boldsymbol{W}(x,t)+\boldsymbol{A}_{0i}\boldsymbol{W}(x,t)+\\ \quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{W}(x,t-r)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{W}(x,t)+\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{\omega}(x,t)\\ \boldsymbol{Z}(x,t)=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{W}(x,t)\end{cases}\tag{3}$$

式中:$i\in\Theta=\{1,2,\cdots,m\}$,表示系统具有 m 个切换子系统;$(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)$, x 表示空间坐标, t 表示时间, $\Omega=\{x,\ \|x\|\leqslant\sqrt{n}\}\subset R^k$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_m,\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing(i,j\in\Theta)$;$\boldsymbol{W}(x,t)\in R^n$ 表示系统的状态;$\boldsymbol{U}(x,t)\in R^s$ 表示控制; $\boldsymbol{\omega}(x,t)\in R^p$ 表示扰动; $\boldsymbol{Z}(x,t)\in R^q$ 表示系统输出; $\Delta=\sum_{k=1}^{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 为 Laplace 算子; $\boldsymbol{D}_i=\mathrm{diag}(d_{i1},d_{i2},\cdots,d_{in})$ ($\forall i\in\Theta$)是对角矩阵; $\boldsymbol{A}_{0i}$、$\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{B}_i$、$\boldsymbol{C}_i$、$\boldsymbol{G}_i$($\forall i\in\Theta$)是已知的具有适当维数的矩阵; K_i 是待定矩阵。上述系统的边值条件满足:

$$\boldsymbol{W}(x,t)=\varphi(x,t),\quad (x,t)\in\boldsymbol{\Omega}\times[-r,0]\tag{4}$$

$$\boldsymbol{W}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\boldsymbol{\Omega}\times[-r,0]\tag{5}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{W}(x,t)}{\partial n}=0,\quad (x,t)\in\partial\boldsymbol{\Omega}\times[-r,+\infty)\tag{6}$$

式中: $\varphi(x,t)$为适当光滑的函数; $\boldsymbol{n}$ 为$\partial\Omega$ 的单位外法向量。

研究目的是设计状态反馈控制律式(2)和切换规则,使得闭环分布参数切换系统式(3)渐近稳定且具有 H_∞ 扰动抑制水平 γ 渐近镇定。

引理 1 Poincare 不等式[20]。已知标量函数 $u\in H_0^1(\overline{\Omega},R)$,且 $\Omega\subseteq\Omega_1$,那么:

$$\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\leqslant\rho^2\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x=\rho^2\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\tag{7}$$

式(7)中: Ω_1:$0\leqslant x_i\leqslant\delta(i=1,2,\cdots,n)$, $\rho=\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$, $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$。

引理 2 线性矩阵不等式[21]:

$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}(x) & \boldsymbol{S}(x)\\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(x) & \boldsymbol{P}(x)\end{bmatrix}<0\tag{8}$$

等价于 $\boldsymbol{Q}(x)<0,\boldsymbol{P}(x)-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{Q}^{-1}(x)\boldsymbol{S}(x)<0$。其中 $\boldsymbol{Q}(x)=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(x)$,$\boldsymbol{P}(x)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(x)$,$\boldsymbol{S}(x)$是仿射依赖于变量 x。

2 主要结果

定理 1 已知具有 m 个子系统的时滞分布参数切换系统[式(3)]在区域 $\Omega_i(i\in\Theta)$内有 Lyapunov 函数为 V_i。若存在矩阵 $\boldsymbol{K}_i$、对角矩阵 $\boldsymbol{P}_i$,使矩阵不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{L}_i<0\tag{9}$$

式(9)中: $\delta_i\in\{0,1\}$, $\sum_{i=1}^{m}\delta_i=1$;且:

$$\boldsymbol{L}_i=\begin{bmatrix}\Sigma_i+\boldsymbol{I} & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i\\ \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\tag{10}$$

式(10) 中:$\Sigma_i=-2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{A}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{0i}+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i$。

切换规则取:

$$i=\arg\min_{i\in\Theta}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{\xi}(x,t)\tag{11}$$

式(11)中: $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(x,t)=[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t),\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-r)]$

那么,系统[式(1)]在状态反馈控制律[式(2)]作用时,闭环系统[式(3)]在没有外界扰动时是渐近稳定的。

证明:构造 Lyapunov 函数为

$$V_i[t,\boldsymbol{W}(x,t)]=\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega\int_{t-r}^{t}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,\theta)\boldsymbol{W}(x,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\tag{12}$$

式(12)中: $\boldsymbol{P}_i$ 为对角正定矩阵。

在没有外界扰动即 $\boldsymbol{\omega}(x,t)=0$ 时,沿着闭环系统[式(3)]的状态轨迹,对 V_i 关于时间 t 求导,得:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_i(t)}{\mathrm{d}t}=&\int_\Omega[\Delta\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{A}_{oi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-\\ &r)\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+\\ &\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{P}_i[\boldsymbol{D}_i\Delta\boldsymbol{W}(x,t)+\boldsymbol{A}_{oi}\boldsymbol{W}(x,t)+\\ &\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{W}(x,t-r)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{W}(x,t)]\mathrm{d}x+\\ &\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{W}(x,t)-\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-r)\boldsymbol{W}(x,t-\\ &r)\mathrm{d}x=\int_\Omega[\Delta\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{W}(x,t)+\\ &\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\Delta\boldsymbol{W}(x,t)]\mathrm{d}x+\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\\ &[\boldsymbol{A}_{oi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{oi}+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{I}]\mathrm{d}x+\\ &\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-r)\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+\\ &\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{W}(x,t-r)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{13}$$

因为 $\boldsymbol{P}_i$、$\boldsymbol{D}_i$ 为对角矩阵,所以 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i=\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{P}_i$,由高斯收敛定理、Poincare 不等[式(7)]及边界条件[式

(4)~式(6)],得到:

$$\int_{\Omega}[\Delta \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{D}_i P_i \boldsymbol{W}(x,t) + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\Delta\boldsymbol{W}(x,t)]\mathrm{d}x \leqslant 2\lambda_{\max}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\left[\int_{\Omega}\Delta\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{I}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x\right] \leqslant 2\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i)\int_{\Omega}[\Delta \boldsymbol{W}_1,\Delta \boldsymbol{W}_2,\cdots,\Delta\boldsymbol{W}_n]\times[\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_n]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x \leqslant -2\lambda_{\max}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\int_{\Omega}(\boldsymbol{W}_1\Delta\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2\Delta\boldsymbol{N}_2 + \cdots + \boldsymbol{W}_n\Delta\boldsymbol{W}_n)\mathrm{d}x \leqslant -2\lambda_{\max}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\int_{\Omega}(\boldsymbol{W}_1^2 + \boldsymbol{W}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{W}_n^2)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)(-2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i)\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x \tag{14}$$

将式(14)代入式(13)得:

$$\frac{\mathrm{d}V_i(x,t)}{\mathrm{d}t} \leqslant \int_{\Omega}[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t),\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-r)]\times L_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}(x,t)\\ \boldsymbol{W}(x,t-r)\end{bmatrix}\mathrm{d}x \tag{15}$$

当 $\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{L}_i < 0,(\delta_i \in \{0,1\})$、$\sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1$ 时,取切换规则[式(11)],则一定存在 $i \in \Omega_i$,使得 $\frac{\mathrm{d}V_i(x,t)}{\mathrm{d}t} < 0$。即当 $i \in \Omega_i$ 时,对于每个子系统 i,都有 $\frac{\mathrm{d}V_i(x,t)}{\mathrm{d}t} < 0$。那么,系统[式(1)]在状态反馈控制律为式(2)时,所得闭环系统[式(3)]在没有外界扰动时是渐近稳定的。

注 1 对式(9)左乘和右乘对角矩阵 $diag\{\boldsymbol{P}_i^{-1},\boldsymbol{I}\}$ 和它的转置矩阵,令 $\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{P}_i^{-1}$、$\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}_i^{-1}$,利用引理 2,可以得到与式(9)等价的线性矩阵不等式:

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{L}_i' < 0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{L}_i' = \begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_i & \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i & \boldsymbol{X}_i & \boldsymbol{0}\\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & -I\end{bmatrix} < 0 \tag{17}$$

式(17)中:$\boldsymbol{T}_i = -2\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{0i}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_{0i}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i + \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}$。

定理 2 已知具有 m 个子系统的时滞分布参数切换闭环系统[式(3)]在区域 $\Omega_i(i \in \Theta)$ 内有对应 Lyapunov 函数为 V_i,对于给定的标量 $\lambda > 0$,若存在矩阵 $\boldsymbol{K}_i$、对角正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i$,使矩阵不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{M}_i < 0 \tag{18}$$

式(18)中:$\delta_i \in \{0,1\}$,$\sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1$,且:

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{bmatrix}\sum_i + \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{G}_i\\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix} \tag{19}$$

那么,在切换规则取:

$$i = \underset{i\in\Theta}{\operatorname{argmin}}\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{\eta}(x,t) \tag{20}$$

的切换信号下,线性抛物型切换系统[式(1)]能够被状态反馈控制[式(2)]具有 H_∞ 扰动抑制水平 γ 渐进可镇定。其中 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t) = [\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t),\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-r),\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(x)]$。

证明 当 $\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{M}_i < 0,(\delta_i \in \{0,1\})$、$\sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1$,时 取切换规则[式(20)],一定存在 $i \in \Omega_i$,使得:

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{bmatrix}\sum_i + \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{G}_i\\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_i + \boldsymbol{I} & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{G}_i\\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

因为:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{22}$$

所以:

$$\begin{bmatrix}\sum_i + \boldsymbol{I} & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{G}_i\\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_i & \boldsymbol{H}_i\\ * & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix} < 0 \tag{23}$$

式(23)中:$\boldsymbol{H}_i = \begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{G}_i\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$。

根据引理 2 和定理 1 可知,$\boldsymbol{L}_i < 0$ 且在没有外扰动时闭环系统[式(3)]是渐进稳定的。

下面研究对于给定的 $\gamma > 0$,系统[式(1)]在状态反馈控制[式(2)]作用下的 H_∞ 控制问题。

$$J = \int_{t_0}^{\tau}\int_{\Omega}[\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(x,s)\boldsymbol{Z}(x,s) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(x,s)\boldsymbol{\omega}(x,s)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{24}$$

则对任意的非零外部扰动 $\omega(x,t) \in R^p$,有:

$$J = \int_{t_0}^{\tau}\int_{\Omega}[\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(x,s)\boldsymbol{Z}(x,s) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(x,s)\boldsymbol{\omega}(x,s)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{\tau}\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}V_i(x,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{\infty}V_i(x,t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{t_0}^{\tau}\int_{\Omega}[\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(x,s)\boldsymbol{Z}(x,s) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(x,s)\boldsymbol{\omega}(x,s)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{\tau}\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}V_i(x,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{25}$$

类似于定理 1 中的推导,可得:

$$J \leqslant \int_{t_0}^{T}\int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{\eta}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 0 \tag{26}$$

式(26)中:

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{bmatrix} \sum_i + \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{0} \\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{27}$$

那么,当 $\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{M}_i < 0(\delta_i \in \{0,1\})$、$\sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1$ 时,在切换规则[式(20)]的切换信号下,一定存在 $i \in \Omega_i$,使得 $\boldsymbol{M}_i < 0$,则有 $J \leqslant 0$,那么,线性抛物型切换系统[式(1)]能够被状态反馈控制[式(2)]具有 H_∞ 扰动抑制水平 γ 渐进镇定。

注 2　对式(18)左乘和右乘对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}_i^{-1}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I}\}$ 和它的转置矩阵,令 $\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{P}_i^{-1}$, $\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}_i^{-1}$,利用引理 2,可以得到与式(18)等价的线性矩阵不等式:

$$\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{M}_i' < 0 \tag{28}$$

式(28)中:

$$\boldsymbol{M}_i' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_i & \boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{G}_i & \boldsymbol{X}_i & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & (-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i)^{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{29}$$

注 3　文献[17]利用 LMI 研究了一类时滞分布参数系统的 H_∞ 控制问题,但没有考虑切换的情况。当切换子系统个数 $m=1$ 时,时滞切换分布参数系统退化为时滞分布参数系统,结果适应于时滞分布参数系统,结论是时滞分布参数系统相关结论的推广。

3　数值例子

下面首先通过对两个不同维数的系统进行数值仿真,说明本文结果的有效性。然后通过仿真对比文献[17]的结果,说明本文结果的优越性。

例 1　假设闭环系统[式(3)]是具有二个子系统的切换系统。已知:$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{02} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$。

令 $\gamma = 0.5$,根据定理 2,利用 MATLAB 工具箱解 LMI[式(28)],得到状态反馈增益矩阵为:$\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} 2.380\,4 & -4.004\,2 \\ -4.021\,0 & 0.440\,8 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} -1.383\,7 & -10.725\,8 \\ -10.652\,7 & 10.565\,7 \end{bmatrix}$。根据定理 2,在切换规则[式(20)]的切换信号下,时滞分布参数切换系统[式(1)]能够被状态反馈控制[式(2)]具 H_∞ 扰动抑制水平 $\gamma = 0.5$ 渐进镇定。

例 2　假设闭环系统[式(3)]是具有二个子系统的三维切换系统,已知:

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{02} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 6 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}。$$

令 $\gamma = 0.6$,根据定理 2,利用 MATLAB 工具箱解 LMI[式(28)],得到状态反馈增益矩阵为:

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} 13.225\,8 & 0.286\,3 & 0.286\,3 \\ 0.286\,3 & 18.168\,0 & -14.286\,7 \\ -15.109\,2 & -14.263\,0 & 17.760\,5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} -14.861\,0 & -107.464\,0 & 53.044\,5 \\ -107.571\,0 & -462.843\,1 & 356.418\,6 \\ 53.358\,0 & 358.168\,1 & -246.810\,7 \end{bmatrix}。$$

可知,在切换规则[式(20)]的切换信号下,时滞分布参数切换系统[式(1)]能够被状态反馈控制[式(2)]具有 H_∞ 扰动抑制水平 $\gamma = 0.6$ 渐进镇定。

例 3　当 $i = 1$ 时,闭环切换系统[式(3)]退化为文献[17]中的闭环系统[式(6)]。本文闭环系统[式(3)]即是文献[17]中闭环系统[式(6)]。取文献[17]中的参数 $\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} =$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -0.9 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.9 & -0.1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix}$, $\gamma = 0.4$。

利用 MATLAB 工具箱解 LMI[式(28)],得到系统状态反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K} = [-1.628\,2 \quad -8.350\,1] \tag{30}$$

对比文献[17]的结果

$$\boldsymbol{K} = [-15.379\,4 \quad -13.215\,1] \tag{31}$$

可以发现,通过本文结论所获得的增益[式(30)]比文献[17]中获得的增益[式(31)]小。说明本文通过较小增益的反馈控制就能实现性能指标为 $\gamma = 0.4$ 的 H_∞ 控制,因此本文的结果优于文献[17]。

进一步,考虑系统的拉普拉斯算子 Δ 系数,不妨令

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

利用 MATLAB 工具箱解 LMI[式(28)],得到系统状态反馈增益矩阵为:

$$\boldsymbol{K} = [-0.697\,3 \quad -2.613\,8] \tag{33}$$

比较上述没有考虑拉普拉斯算子 Δ 系数($\boldsymbol{D} = 0$)的增益[式(30)],显然增益[式(32)]小于增益[式(30)]。说明:如果考虑拉普拉斯算子 Δ 的系数对系统性能有影响,则可以通过更小增益[式(32)]的反馈控制实现性能指标为 $\gamma = 0.4$ 的 H_∞ 控制。

4 结论

通过构造 Lyapunov 函数,结合 Poincare 不等式和 LMI,设计了时滞分布参数切换系统 H_∞ 状态反馈控制器和切换规则,给出了该时滞分布参数切换系统渐近可镇定条件。比较已有分布参数系统相关结论,考虑了分布参数系统中拉普拉斯算子的系数 $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 对系统性能的影响。所得结果是已有时滞分布参数系统 H_∞ 控制结论的推广。从仿真结果看,改进了时滞分布参数系统有关 H_∞ 控制的相关结果。

参 考 文 献

1 Jeon D, Tomizuka M. Learning hybrid force and position control of robot manipulators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 9(4): 423-431

2 Varaiya P. Smart car on smart roads: Problems of control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(2): 195-207

3 Horowitz R, Varaiya P. Control design of an automated highway system[J]. Proceedings of IEEE, 2002, 88(7): 913-925

4 Williams S M, Hoft R G. Adaptive frequency domain control of PWM switched power line conditioner[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 1991, 6(4): 665-670

5 Peleties P, Decarlo R. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions[C]// The Proceedings of 31st American Control Conference. New York: IEEE, 1992: 1679-1684

6 Sun Z D, Ge S S. Switched linear systems: Control and design[M]. New York: Springer-Verlag, 2005

7 Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(2): 308-322

8 董学平, 温 锐, 刘红亮. 一类时滞分布参数切换系统的鲁棒容错控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 232-236
Dong Xueping, Wen Rui, Liu Hongliang. Robust fault-tolerant control for a class of distributed parameter switched system with time-delay[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 232-236

9 Amin S, Hante F, Bayen A. Exponential stability of switched linear hyperbolic initial-boundary value problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(2): 291-301

10 Yang H, Jiang B. On stability of nonlinear and switched parabolic systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(5): 749-756

11 Bao L P, Fei S M, Yu L. Exponential stability of linear distributed parameter switched systems with time-delay[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2014, 27(2): 263-275

12 鲍乐平. 分布参数切换系统稳定性研究[D]. 南京: 东南大学, 2014
Bao Leping. Study on stability of distributed parameter switched systems[D]. Nanjing: Southeast University, 2014

13 Sun X M, Zhao J, Hill D J. Stability and L2-gain analysis for switched delay systems: A delay-dependent method[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1769-1774

14 Zhang W A, Yu L. Stability analysis for discrete-time switched time-delay systems[J]. Automatica, 2009, 45(10): 2265-2271

15 Luo Y P, Xia W H, Liu G R, et al. LMI approach to exponential stabilization of distributed parameter control systems with delay[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(3): 299-304

16 罗毅平, 邓飞其, 刘国荣. 基于 LMI 方法的时滞分布参数控制系统的镇定[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 625-628
Luo Yiping, Deng Feiqi, Liu Guorong. LMI-based approach for stabilization of distributed parameter control systems with delay[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 625-628

17 李延波. 时滞分布参数系统的 H_∞ 控制[J]. 科学技术与工程, 2010, 10(26): 6391-6393
Li Yanbo. H_∞ Control for distributed parameter systems with delay[J]. Science Technology and Engineering, 2010, 10(26): 6391-6393

18 Bao L P, Fei S M, Chai L. H-infinity control of switched linear parabolic systems[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2014, 131: 1-10

19 高存臣, 刘 振, 徐瑞萍. 一类具有连续分布时滞的分布参数系统的反馈控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 445-450
Gao Cunchen, Liu Zhen, Xu Ruiping. Feedback control for a class of distributed parameter systems with continuous distributed time-delay[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 445-450

20 陈祖墀. 偏微分方程[M]. 2 版. 合肥：中国科学技术大学出版社，2002
Chen Zuxhi. Partial differential equations[M] 2nd ed. Hefei：University of Science and Technology of China Press，2002
21 Boyd S，Ghaoui L E，Feron E，et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadephia：SIAM，1994：7-8

H_∞ Control for Distributed Parameter Switched Systems with Time Delay

BAO Le-ping[1]，HUANG Pu[2]

（Department of Automation，Taiyuan Institute of Technology[1]，Taiyuan 030008，China；School of Information Science and Engineering，Northeast University[2]，Shenyang 100819，China）

[**Abstract**] The H_∞ control problem for a class of switched distributed parameter system with time-delay is considered. By constructing H_∞ appropriate Lyapunov functions，employing poincare and linear matrix inequalities，the asymptotical stability's sufficient condition of closed-loop delay system is given. Furthermore，the control state feedback controller and the switching rule are designed. Compared with the results of distributed parameter systems，the research considered the coefficient's influence of Laplacian. The obtained result can be regarded as the extension of H_∞ control for distributed parameter system. Finally，numerical examples are given to illustrate the proposed result.

[**Key words**] switched system distributed parameter system time-delay Lyapunov functions asymptotical stability H_∞ control